CORSO di ALGEBRA (A-L)
2014-15

PROVA INTERMEDIA
19-11-2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola SOTTOSOPRA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: STO, OSO, TOP.

Soluzione.
Il numero degli "anagrammi" della parola SOTTOSOPRA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{10} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale a $\frac{10!}{3!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza STO,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza OSO,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza TOP,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una delle sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione.
Un elemento di A si ottiene anagrammando la parola (STO)AOOPRST, dove la sequenza STO è considerata una lettera, ma essendo gli anagrammi di (STO)(STO)AOPR contati due volte, si ha $|A| = \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}$. Analogamente un elemento di B si ottiene anagrammando la parola (OSO)AOPRSTT, dove la sequenza OSO è considerata una lettera, ma essendo gli anagrammi di (OSOSO)AOPR contati due volte si ha: $|B| = \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}$. Si ha $|C| = \frac{8!}{2!2!}$.
L'insieme $(A\cap B)$ è l'unione dell'insieme X delle parole ottenute anagrammando la parola (STO)(OSO)APRT con l'insieme Y delle parole ottenute anagrammando la parola (STOSO)AOPRT, quindi per il principio di inclusione-esclusione si ha $|A\cap B| = |X| + |Y| - |X\cap Y| = 6! + 6!$. Anche l'insieme $(A\cap C)$ è l'unione dell'insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (STO)(TOP)AORS con l'insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (STOP)AOORST, la loro intersezione è insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (STOP)(STO)AOR, pertanto $|A\cap C| = 6! + \frac{7!}{2!} - 5!$. Risulta $|B\cap C| = 6!$.
Infine $(A\cap B\cap C)$ è l'unione dell'insieme Z delle parole ottenute permutando le lettere (STOSO),(TOP),A,R con l'insieme K degli anagrammi della parola (STOP)(CED)ENS, dunque $|A\cap B\cap C| = |Z|+|K| - |Z\cap K| = 4!+5!$.
Per il principio di inclusione-esclusione si ha:
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

ESERCIZIO 2. Determinare:
a) in $\mathbf{Z}_{275}$ le soluzioni dell'equazione $15\,x = 50$,
b) le soluzioni della rispettiva equazione in $\mathbf{Z}$: $15\,x \equiv 50 \bmod 275$,
c) il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_{275}$ e la sua cardinalità.

Soluzione.
L'equazione è compatibile poiché il MCD(15,275) = 5 divide 50. Si ha :
$$15s \equiv 50 \bmod 275 \text{ se e solo se } 3s \equiv 10 \bmod 55.$$

L'equazione in $\mathbf{Z}_{55}$: $3x = 10$ ha una sola soluzione poiché MCD(3,55) = 1 che è data $x = 3^{-1}\,10$. Per calcolare 3^{-1}, si consideri l'identità di Bézout: 1= 3(-18)+ 55, da cui in $\mathbf{Z}_{55}$: 1 = 3(-18) +0 = 3 37 e dunque $3^{-1} = 37$. Pertanto l'unica soluzione in $\mathbf{Z}_{55}$ di $3x = 10$ è $x = 3^{-1}\,10 = (37)(10) = 370 = 40$. Le soluzioni di 15x = 50 in $\mathbf{Z}_{275}$ sono le 5 classi di equivalenza in cui si ripartisce la classe $[40]_{55}$:

$[40]_{275}$, $[40+ 55]_{275}$, $[40+ (2)55]_{275}$, , $[40+ (3)55]_{275}$,$[40+ (4)55]_{275}$.

Pertanto le soluzioni in **Z** dell'equazione $15s \equiv 50 \bmod 275$ sono infinite e sono tutti gli interi della classe $[40]_{55}$.

Infine $U(\mathbf{Z}_{275}) = \{n\in \mathbf{Z}_{275} : MCD(n,275) = 1\}$ e $|U(\mathbf{Z}_{275})| = \varphi(275) = 275(1\text{-}1/3)(1\text{-}1/5) = 200$, dove φ è la funzione di Eulero.

ESERCIZIO 3. Discutere la compatibilità ed eventualmente trovare le soluzioni della seguente equazione diofantea:

$$124 = 136x+ 24y.$$

Soluzione.

Si ha MCD(136,24) = 8 e dunque poiché 8 non divide 124 l'equazione non ha soluzioni intere. Infatti se ci fosse una soluzione (a,b), 124 apparterrebbe a $S(a,b) = \{m \in \mathbf{N}^+: m = 136x+24y\} = \{ kd : k\in \mathbf{N}^+, d= MCD(136,24)\}$.

ESERCIZIO 4. Scrivere la tabella di addizione e moltiplicazione per $(\mathbf{Z}_2x\mathbf{Z}_3,+, \bullet)$ dove + e • sono le operazioni naturali definite da:

$$([a]_2,[b]_3) + ([c]_2,[d]_3) = ([a]_2+[c]_2,[b]_3+[d]_3)$$
$$([a]_2,[b]_3) \bullet ([c]_2,[d]_3) = ([a]_2[c]_2,[b]_3[d]_3)$$

Che tipo di struttura è $(\mathbf{Z}_2x\mathbf{Z}_3,+, \bullet)$? Quali sono gli elementi invertibili?

Sia $f : \mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_2x\mathbf{Z}_3$ l'applicazione definita da $f([x]_6) = ([x]_2,[x]_3)$ verificare che f è biiettiva. L'anello $\mathbf{Z}_6$ e $(\mathbf{Z}_2x\mathbf{Z}_3,+, \bullet)$ sono isomorfi?

Soluzione.

Il gruppo degli elementi invertibili è costituito da (1,1) e (1,2). Si ha: (1,0) (0,1) = (0,0), pertanto $(\mathbf{Z}_2x\mathbf{Z}_3,+, \bullet)$ è un anello commutativo unitario con divisori dello zero. L'applicazione f è un morfismo di anelli, infatti:

$f(([x]_6+[y]_6) = f([x+y]_6) = ([x+y]_2,[x+y]_3) = ([x]_2,[x]_3) +([y]_2,[y]_3) = f([x]_6)+f(([y]_6)$,

$f(([x]_6[y]_6) = f([xy]_6) = ([xy]_2,[xy]_3) = ([x]_2,[x]_3) \bullet ([y]_2,[y]_3) = f([x]_6) \bullet f(([y]_6)$.

Inoltre $Kerf = \{(0,0)\}$, infatti se $[x]_2 = 0$ e $[x]_3 = 0$ allora x è divisibile sia per 2 e sia per 3 e quindi è un multiplo di 6, ossia $[x]_6 = 0$. Poiché f è una applicazione tra insiemi finiti è biunivoca.