

ALGEBRA (A-L)

(2014-15)

SCHEDA 3

Strutture algebriche

1. STRUTTURE ALGEBRICHE

Sia (M, \bullet) un monoide con unità 1_M e sia $a \in M$. Le **iterazioni della operazione** \bullet sono definite da:

$$a^0 = 1_M, a^{n+1} = a \bullet a^n.$$

1.1. Dimostrare che $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$.

1.2. Sia (M, \bullet) un monoide e sia $a \in M$. Dimostrare che esiste un solo morfismo di monoidi $f: (\mathbf{N}, +) \rightarrow (M, \bullet)$ tale che $f(1) = a$.

1.3. Siano (A, \cdot) e (A', \bullet) strutture algebriche e sia $f: A \rightarrow A'$ un morfismo, ossia:

$$f(a \cdot b) = f(a) \bullet f(b) \text{ per ogni } a, b \in A$$

dimostrare che $(A/\sim_f, \cdot)$, dove \sim_f è la relazione individuata da f , è una struttura algebrica isomorfa ad (A', \bullet) .

1.2. . Siano (A, \cdot) e (A', \bullet) strutture algebriche. Dimostrare che la composta di morfismi e l'inversa di un morfismo sono morfismi.

2. GRUPPI.

2.1. Determinare quali delle seguenti strutture algebriche (A, \cdot) sono monoidi e quali gruppi:

- $A = \mathbf{Z}$, con $a \cdot b = a - b$.
- $A = \mathbf{Z} - \{0\}$, con l'usuale prodotto.
- $A = \{p/q \in \mathbf{Q} : \text{MCD}(p, q) = 1, q \text{ è dispari}\}$, con $a \cdot b = a + b$.
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $a \cdot b =$ resto della divisione per 5 di $a + b$.
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $a \cdot b =$ resto della divisione per 5 di a per b .
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $a \cdot b =$ resto della divisione per 6 di a per b .

2.2. Sia (G, \cdot) un gruppo. Verificare che l'insieme degli automorfismi $f: G \rightarrow G$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni. Tale gruppo sarà indicato con $\text{Aut}(G)$ e si chiama anche **gruppo delle trasformazioni di G**.

2.3. Dimostrare che in un gruppo (G, \cdot) valgono le leggi di cancellazione a sinistra :

$g \cdot h = g \cdot k$ implica $h = k$; e a destra: $h \cdot g = k \cdot g$ implica $h = k$.

2.4. Dimostrare che se (G, \cdot) è una struttura algebrica associativa tale che:

- G è finito,

- in G valgono le leggi di cancellazione.

Allora (G, \cdot) è un gruppo. (cfr. "Algebra Moderna" pag. 61)

2.4. Sia (G, \cdot) un gruppo. Un sottoinsieme S non vuoto di G è un sottogruppo se e solo se per ogni $s, t \in S$ si ha: $s \cdot t^{-1} \in S$.

2.5. Sia E un insieme e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Posto:

$$G(A) = \{f \in S(E) : f(a) = a, \text{ per ogni } a \text{ di } A\}$$

dimostrare che $G(A)$ è un sottogruppo di $S(E)$. (cfr. "Algebra Moderna" pag. 53)

2.6. Sia n un numero intero maggiore di 1. Verificare che l'insieme dei multipli interi di n è un sottogruppo di \mathbb{Z} .

2.7. Sia $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ con l'operazione \cdot definita da:

$$i^2, j^2, k^2 = -1, i \cdot j = k$$

è un gruppo chiamato *gruppo dei quaternioni*. Determinare tutti i sottogruppi di tale gruppo. (cfr. "Algebra moderna" pag. 51). Scrivere la tabella di composizione.

2.8. Siano (G, \cdot) un gruppo e X un insieme non vuoto, definire una struttura di gruppo nell'insieme G^X delle applicazioni da X in G .

2.9. Siano (G, \cdot) e $(H, *)$ gruppi, definire una struttura di gruppo nell'insieme prodotto $G \times H$.

2.10. Sia (G, \cdot) un gruppo finito dimostrare che un sottoinsieme non vuoto T di G è un sottogruppo se e solo se T è chiuso.

2.11. Si consideri in \mathbb{Q} l'operazione $*$ definita ponendo $x * y = 3xy/2$. Che tipo di struttura è $(\mathbb{Q}, *)$?

2.12. Dato un gruppo (G, \cdot) e un elemento g di G dimostrare che esiste un solo morfismo di gruppi $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \cdot)$ tale $f(1) = g$.

2.13. Sia $f: (G, \cdot) \rightarrow (H, \cdot)$ un morfismo di gruppi dimostrare che se T è un sottogruppo di G allora $f(T)$ è un sottogruppo di H .

2.14. Si consideri in \mathbb{Q} l'operazione $*$ definita ponendo $x * y = (x+y) - 1/3$. Che tipo di struttura è $(\mathbb{Q}, *)$?

2.15. Si consideri la struttura algebrica $(2\mathbb{Z}, *)$ dove $2\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri pari e $*$ è l'operazione su $2\mathbb{Z}$ definita da $z * w = 4z + 4w - zw/2 - 24$. Si provi che tale struttura è un gruppo. Si consideri l'applicazione $f: (\mathbb{Z}, \cdot) \rightarrow (2\mathbb{Z}, *)$ definita ponendo $f(x) = 8 - 2x$. Verificare che f è un isomorfismo di gruppi, ossia:

- f è biunivoca,
- f è un morfismo di gruppi.

2.16. Dimostrare che se H e T sono sottogruppi del gruppo (G, \cdot) allora $H \cap T$ è un sottogruppo di G .

2.17. Sia $X = \{a, b, c\}$. Si consideri la struttura algebrica $(X, *)$ dove $*$ è definita dalla seguente tavola di composizione:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Quali sono le proprietà di $*$? Che tipo di struttura algebrica è $(X, *)$?

2.18. Sia E un insieme e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Posto:

$$G(A) = \{f \in S(E) : f(A) = A\}$$

dimostrare che $G(A)$ è un sottogruppo di $S(E)$.

2.19. Sia (G, \cdot) un gruppo e $a \in G$, dimostrare che esiste un solo morfismo di gruppi f dal gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ nel gruppo (G, \cdot) tale che $f(1) = a$.

Un **anello** è una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ tale che:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano
- (A, \cdot) è un semigrupp
- Per ogni $a, b, c \in A$, si ha: $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$.

Un anello in cui $(A - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano si dice **campo**.

3. ANELLO $\mathbb{K}[x]$ DEI POLINOMI NELL'INDETERMINATA x .

3.1. Dimostrare che gli unici polinomi invertibili sono i polinomi di grado zero.

3.2. Siano $f(x)$ e $g(x)$ polinomi con $g(x) \neq 0$. Dimostrare per induzione sul grado di $f(x)$ che esiste un'unica coppia di polinomi $(q(x), r(x))$ tale che:

i) $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

ii) $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Un elemento $c \in \mathbb{K}$ si dice **radice** del polinomio $f(x)$ se risulta $f(c) = 0$.

3.3. Dimostrare che c è radice di $f(x)$ se e solo se il polinomio $(x-c)$ divide $f(x)$, ossia $f(x) = g(x)(x-c)$.

3.4. Dimostrare che un polinomio di grado n ha al più n radici.

3.5. Posto $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$, determinare le radici dei polinomi: $x^2 - 1$, $x^2 - 3x + 2$, $2x^2 - x + 1$. Questi polinomi sono divisibili per $(x-1)$?

3.6. In $\mathbb{Z}_{11}[x]$ si considerino i polinomi $f(x) = x^8 - 2x^5 + 4x^3 + 6x - 10$ e $g(x) = 8x^3 + 10x + 2$. Si determinino i polinomi: $f(x) + g(x)$ e $f(x)g(x)$.

3.7. Posto $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ con p numero primo, si verifichi che 1 e 5 sono radici di $g(x) = x^2 - 6x + 4$. Si determinino i valori di p per i quali 10 è radice di $g(x)$ e i valori di p per i quali $g(x)$ ha radice doppia.

3.8. Posto $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, determinare i valori di a affinché il polinomio $(x^4 + ax + a)$ abbia radici.

3.9. Siano $f(x)$ e $g(x)$ polinomi di $\mathbb{R}[x]$. Dimostrare che $f(x) = g(x)$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha: $f(n) = g(n)$.

3.10. Sia \mathbb{K} un campo. Si indichi con $\mathbb{K}(x)$ l'insieme delle endofunzioni polinomiali di \mathbb{K} , ossia:

$$\mathbb{K}(x) = \{f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}} : \text{esiste un polinomio } p(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ tale che } f(k) = p(k), \text{ per ogni } k \in \mathbb{K}\}.$$

Verificare che $\mathbb{K}(x)$ è un sottoanello dell'anello $(\mathbb{K}^{\mathbb{K}}, +, \cdot)$ con le operazioni naturali.

Si osservi che due polinomi distinti possono individuare la stessa funzione polinomiale. Si dimostri che se K è un campo con infiniti elementi allora due polinomi che individuano la stessa funzione polinomiale sono uguali.

4. L'ANELLO DEGLI INTERI, ALGORITMO DI EUCLIDE, MCD(a,b), CLASSI RESTO MODULO n .

4.1. Usando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, determinare il massimo comun divisore di a e b ed esprimerlo nella forma $as+bt$ con s,t interi (identità di Bézout), quando:

$$a = -1705 \text{ e } b = 325$$

$$a = -1605 \text{ e } b = -738$$

$$a = 2094 \text{ e } b = 18$$

$$a = 5305 \text{ e } b = 9150$$

4.2. Verificare che $\text{MCD}(a,b) = \text{MCD}(a,b+ax)$ per ogni intero x .

4.3. Dimostrare per induzione il teorema fondamentale dell'aritmetica: ogni numero naturale $n \geq 2$ si esprime come prodotto di numeri primi.

4.4. Siano $a,b,c \geq 1$ e tali che $a|bc$. Dimostrare che se $\text{MCD}(a,b) = 1$ allora a divide c . Quindi se p è un numero primo e $p|ab$ allora p divide a oppure b .

4.5. Siano m e n interi maggiori di 1 e sia

$$A = \{p \in \mathbf{N} : p \text{ è primo, } p|m \text{ oppure } p|n\} = \{p_1, \dots, p_t\}$$

pertanto:

$$m = p_1^{a(1)} p_2^{a(2)} \dots p_t^{a(t)} \quad \text{e} \quad n = p_1^{b(1)} p_2^{b(2)} \dots p_t^{b(t)}$$

Completare le seguenti frasi:

- m divide n se.....
- Il massimo comun divisore di m ed n è.....
- Il minimo comune multiplo di m ed n è....
- m/n è un intero se
- m/n è un intero divisibile per p_i se ...

4.6. Dimostrare che:

- Se $\text{MCD}(a,b) = 1$ allora $\text{mcm}(a,b) = ab$.
- $\text{mcm}(ka,kb) = k \text{mcm}(a,b)$.
- Se $d = \text{MCD}(a,b)$ allora $\text{MCD}(a/d, b/d) = 1$.
- $\text{mcm}(a,b) = ab / \text{MCD}(a,b)$

4.7. Verificare la compatibilità delle seguenti congruenze e quando possibile determinare le soluzioni:

$$12x \equiv 7 \pmod{21}, \quad 12x \equiv 7 \pmod{84}, \quad 12x \equiv 7 \pmod{73}, \quad 12x \equiv 7 \pmod{46}, \quad 12x \equiv 7 \pmod{35}.$$

4.8. Determinare gli elementi invertibili e i rispettivi inversi di $\mathbf{Z}_6, \mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_{10}, \mathbf{Z}_{11}$.

4.9. Scrivere la tabella di addizione e moltiplicazione per $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \cdot)$ dove $+$ e \cdot sono le operazioni naturali definite da:

$$([a]_2, [b]_3) + ([c]_2, [d]_3) = ([a]_2 + [c]_2, [b]_3 + [d]_3)$$

$$([a]_2, [b]_3) \bullet ([c]_2, [d]_3) = ([a]_2[c]_2, [b]_3[d]_3)$$

Che tipo di struttura è $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \bullet)$? Quali sono gli elementi invertibili?

Sia $f: \mathbf{Z}_6 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ l'applicazione definita da $f([x]_6) = ([x]_2, [x]_3)$ verificare che f è biettiva, \mathbf{Z}_6 e $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \bullet)$ sono isomorfi?

4.10. Sia a un numero espresso in base 10 da: $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$.

Dimostrare i criteri di divisibilità:

9 divide a se e solo se 9 divide la somma delle cifre $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

3 divide a se e solo se 3 divide la somma delle cifre $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

5 divide a se e solo se 5 divide a_0 .

11 divide a se e solo se 11 divide $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$.

4.11. Dimostrare usando il teorema fondamentale dell'aritmetica che se p è un numero primo allora \sqrt{p} è un numero irrazionale.

4.12. Dimostrare che $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{6}$.

4.13. Verificare se sono isomorfi i gruppi $u(\mathbf{Z}_5)$, $u(\mathbf{Z}_8)$, $u(\mathbf{Z}_{10})$ degli elementi invertibili rispettivamente di \mathbf{Z}_5 , \mathbf{Z}_8 , \mathbf{Z}_{10} . Quali sono isomorfi al gruppo $(\mathbf{Z}_4, +)$?

4.14. Determinare: $3^{17} \pmod{7}$, $81^{119} \pmod{13}$, $310^{71} \pmod{12}$.

4.15. Andate al fiume con un recipiente da 12 litri e uno da 17 litri, avete bisogno di avere esattamente 8 litri come fate?

4.16. Risolvere le seguenti equazioni diofantee: $283x + 1722y = 31$, $365x + 72y = 18$.

5. PERMUTAZIONI

5.1. Esprimere le seguenti permutazioni rappresentate da una parola come prodotto di cicli disgiunti: $\sigma_1 = 537824169$, $\sigma_2 = 935128746$, $\sigma_3 = 524983176$, $\sigma_4 = 736892154$. Rappresentarle in forma standard come prodotto di cicli.

5.2. Verificare se σ è una permutazione di S_n esiste k in \mathbf{N} non nullo tale che $\sigma^k = 1$, il più piccolo di tali interi si dice ordine di σ . Dimostrare che l'ordine di una permutazione è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli.

5.3. Sia $\sigma \in S_n$, verificare che due cicli disgiunti di σ commutano.

5.4. Determinare la parità delle permutazioni in 5.1. ed esprimerle come prodotto di trasposizioni.

5.5. Verificare che se σ è una permutazione di S_n di classe dispari, allora per ogni permutazione τ si ha $\tau^2 \neq \sigma$.

5.6. Dimostrare che ogni permutazione è il prodotto di permutazioni 3-cicliche.

5.7. Dimostrare che se X ed Y sono insiemi equipotenti allora l'insieme $S(X)$ delle permutazioni di X è equipotente all'insieme $S(Y)$ delle permutazioni di Y .

5.8. Dimostrare l'insieme A_n delle permutazioni pari è un sottogruppo normale del gruppo simmetrico S_n di cardinalità $n!/2$.