ALGEBRA (A-L)

(2014-15)

SCHEDA 2

Funzioni, numeri naturali e il principio di induzione, cardinalità.

1.Funzioni.

1.1. Sia f: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definita da: $f(a,b)=(a+2b,-b)$ e sia g: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definita da: $g(a,b)= (-a,3b)$. Verificare se f e g sono funzioni iniettive e se sono suriettive. Definire $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ e verificare se sono iniettive e se sono suriettive.

1.2. Sia f: $A \to B$ una funzione, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Dimostrare che : $X \subseteq f^{-1}(f(X),)$ e $f f^{-1}(Y) \subseteq Y$

*Si denoti con id(A): A→A l'endofunzione identità (id(A)(a) = a per ogni a di A). Siano f: A→B e g : B→A applicazioni tali che (g ∘ f) = id(A), allora g si dice **inversa sinistra** di f e l'applicazione f si dice **inversa destra** di g.*

1.3. Dimostrare che f :$A \to B$ $(A \neq \emptyset)$ ha una inversa sinistra se e solo se è iniettiva.

1.4. Dimostrare che f: $A \to B$ $(A \neq \emptyset)$ ha un' inversa destra se e solo se è suriettiva.

1.5. Sia f : $A \to B$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

a) f è iniettiva

b) per ogni $X \in P(A)$ si ha: $f^{-1}(f(X)) = X$

c) per ogni X e Y sottoinsiemi di A si ha: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

1.6. Verificare se le seguenti funzioni sono iniettive e se sono suriettive:

- ✓ $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$: $f(x) = \log x$
- ✓ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $f(x) = |x|$
- ✓ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$: $f(x) = x^2 +1$
- ✓ f : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $f(x,y) = x^2+y^2$
- ✓ f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $f(x,y) = 3x-1$
- ✓ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$: $f(x) = (x^2,x+1)$
- ✓ Sia A un insieme e sia $S \subseteq A$, $f : P(A) \to P(A)$: $f(X)= X \cup S$

1.7. Esprimere le funzioni precedenti come composizione di una funzione suriettiva e di una iniettiva.

1.8. Sia f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ l'applicazione definita da: $f(x) = 8x$. Determinare : $f^{-1}(16)$, $f^{-1}(25)$, $f(\{2,-5,10\})$, *Im f* e *Ker f.* L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

1.9. Siano $a,b \in \mathbf{R}$ Dimostrare che l'applicazione f:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x)=ax+b$ è biunivoca per ogni $a \neq 0$.

1.10. Data la funzione f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ definita da : $f(x) = -3x$ se $x<0$, $f(x) = x+2$ se $x\geq 0$. Determinare l'immagine di f.

1.11. Siano f: $A\to B$ e g: $B\to C$ due applicazioni. Dimostrare che se f e g sono iniettive allora $(g \circ f)$ è iniettiva, se f e g sono suriettive allora $(g \circ f)$ è suriettiva. Trovare due funzioni f e g non entrambe iniettive (suriettive) la cui composta $(g \circ f)$ sia iniettiva (risp. suriettiva).

2. I numeri naturali e il principio di induzione.

L'insieme ***N*** *dei numeri naturali è definito dalle seguenti proprietà:*
I. Esiste una funzione $\sigma : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *iniettiva.*
II. Esiste un elemento 0 tale che $0 \notin \mathrm{Im}\ \sigma$.
III. (Principio di induzione) Sia U un sottoinsieme di ***N*** *tale che:*
$0 \in U$, *se* $n \in U$ *anche* $\sigma(n) \in U$
allora $U = \mathbf{N}$.

2.1. Dimostrare che $\mathrm{Im}\ \sigma = \mathbf{N}-\{0\}$.

2.2. Dimostrare che $\sigma^n(0) = n$.

2.3. Dati due interi x e y, dimostrare che $(x-y)$ divide (x^n-y^n)per ogni $n \in \mathbf{N}$.

2.4. La successione di Fibonacci definita da: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$per ogni $n\geq 2$, è un esempio di successione definita induttivamente. Provare che:

- ✓ a_n e a_{n+1} non hanno fattori in comune eccetto 1;
- ✓ Per ogni $n\geq 1$ si ha $a_1^2+\ldots+ a_n^2= a_n a_{n+1}$;
- ✓ Per ogni $n\geq 1$ si ha $a_1+ a_3+\ldots+ a_{2n-1}= a_{2n}$

2.5. Dato l'enunciato: "Tutte le persone hanno gli occhi dello stesso colore", trovare l'errore nella dimostrazione che segue. Sia n il numero di persone. Per n=1 l'enunciato è ovviamente vero. Sia $n\geq 2$. Per ipotesi induttiva prese comunque (n-1) persone queste hanno tutte gli occhi dello stesso colore. Sia A un insieme di n persone, ordinato A si indichi con p_1 e p_n rispettivamente la prima e l'ultima persona di A. Per l'ipotesi di induzione le persone dell'insieme $A-\{p_n\}$ hanno tutte gli occhi dello stesso colore, quindi il colore degli occhi di p_1 è uguale al colore degli occhi di p_{n-1}. Ma anche le persone di $A-\{p_1\}$, essendo (n-1), hanno tutte gli occhi dello stesso colore quindi anche p_n ha il colore degli occhi uguale a quello degli occhi di p_{n-1} colore che è lo stesso di quello degli occhi di tutte le altre persone di A. Dunque supposto l'enunciato vero per (n-1) si è dimostrato che è vero per n e pertanto si è dimostrato per induzione che l'enunciato dato è vero per ogni n>0.

2.6. Dimostrare per induzione su n le seguenti uguaglianze:

a) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

e) $1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1) = n^2$

f) $1 + 5 + 9 + \cdots (4n+1) = (n+1)(2n+1)$

g) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

h) $2^3 + 3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

i) $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (2n+1)(n+1)$

2.7. Dimostrare che (**N,**+), dove l'operazione di somma è definita da: $m+n = \sigma^n(m)$,e (**N-{0},.**), dove l'operazione di prodotto è definita da $m \cdot n = (\sigma^m)^n(0)$, sono monoidi commutativi.
2.8. Dimostrare che la relazione ≤ definita da:
per ogni $m,n \in$ **N**, $m \leq n$ se e solo se esiste $x \in$ **N** tale che $m + x = n$;
è una relazione d'ordine totale su N.
2.9. Dimostrare che le operazioni su N sono isotone, ossia
Se $m \leq n$ e $x \in$ **N** allora $(m+x) \leq n+x$ e $(mx) \leq (nx)$

N *con la relazione d'ordine naturale è totalmente ordinato e ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un primo elemento, ossia* **N** *è ben ordinato*.
Dim. Per assurdo, sia V un sottoinsieme non vuoto senza primo elemento.
Sia P(n) il seguente enunciato:

P(n) = "Per ogni $v \in$ V , risulta $n \leq v$"

Risulta P(0) vera. Supposta vera P(n), è vera anche P(n+1). Infatti se per ogni $v \in$V si ha $n \leq v$, allora n è distinto da v altrimenti n sarebbe il primo elemento di V. Quindi per ogni $v \in$V esiste x tale che $n+x = v$ con $x \neq 0$, da cui $x = \sigma(y) = y+1$ e dunque $n+1+x = v$, ossia $(n+1) \leq v$.
Pertanto si è dimostrato per induzione che P(n) è vera per ogni naturale n, ma ciò è assurdo poiché se $n \in$V si avrebbe per ogni $v \in$ V $(n+1) \leq v$ e quindi anche $(n+1) \leq n$.

3. Equipotenza, cardinalità, dimostrazioni biiettive.

3.1. Dimostrare il principio della somma: A,B insiemi finiti $A\cap B=\emptyset$, $|A\cup B|=|A|+|B|$.
3.2. Dimostrare il principio del prodotto: A,B insiemi finiti $|AxB|=|A|.|B|$.
3.3. Siano R,S,A,B insiemi con $A\cap B=\emptyset$. Dimostrare che $|R^{A\cup B}|=|R^A x R^B|$, $|(RxS)^A|=|R^A x S^A|$, $|(R^A)^B|=|R^{AxB}|$.
3.4. Siano A,R, insiemi finiti. Determinare il numero delle funzioni iniettive da A in R.
3.5.Si indichi con $\binom{n}{k}$ il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi, tale numero si chiama coefficiente binomiale.
Dimostrare che:
$\binom{0}{0}=1$, $\binom{0}{k}=0$ con $k\neq\emptyset$, $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$
3.6. Dimostrare il teorema binomiale: per ogni $x,y\in\mathbf{R}$ si ha:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

3.7.Dimostrare che l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme di cardinalità n ha 2^nelementi. Quindi:
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.
3.8. Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
3.9. Dimostrare il principio di inclusione esclusione: Sia t>1 e siano $A_1,\ldots A_t$ sottoinsiemi finiti di un insieme R . Allora si ha:

$$|\cup_{i=1,..t} A_i|=\Sigma_{\emptyset\neq I}(-1)^{|I|-1}|\cap_{i\in I} A_i|$$

dove la somma è estesa a tutti i sottoinsiemi non vuoti I dell'insieme $\{1,\ldots,t\}$.
3.10. Quanti sono gli "anagrammi"(anche privi di significato) della parola TRATTARE? Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze TRA. ATTA e ARE?
3.11. Dato un insieme finito, dimostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari.