ALGEBRA (A-L)

(2014-15)

SCHEDA 1

Insiemi: descrizione e rappresentazione, elementi e appartenenza. Sottoinsiemi, insieme vuoto. Unione, intersezione, complemento. Prodotto cartesiano. Relazioni.

1. *Si assegna un insieme quando: a) si elencano i suoi elementi,*
   b) si definisce una proprietà.

1.1. Per gli insiemi seguenti si riconosca come sono definiti:

- Insieme degli articoli della lingua italiana.
- $\{1,3,6,10,15,21,28,\ldots.\}$
- $\{x \in \mathbf{N}: \exists\ z$ tale che $x = z-3\}$
- Insieme delle regioni italiane.
- $\{1,5,12,22,35,51,\ldots\}$
- $\{x \in \mathbf{N}$: $x-1$ è pari$\}$
- Insieme delle ossa del cingolo pelvico.
- $\{x\in\mathbf{N}: x = x^2\}$
- $\{1,2,3,5,8,13,21,3,\ldots\}$
- $\{x\in\mathbf{N}: \exists\ z\in\mathbf{N}$ tale che $x =2z+1\}$
- $\{5,7,9,11,13,15\}$,
- Insieme dei numeri primi, pari e diversi da 2.
- {Parco Colle Oppio, Parco Egerio, Parco S'Andrea, Parco San Gregorio, Parco San Sebastiano, Parco degli Scipioni}
- $\{1,4,9,16,25,\ldots,n^2,\ldots\}$
- $\{x\in\mathbf{N}: x^2+x =1\}$
- Insieme dei multipli di 3 compresi tra 10 e 22.
- $\{x\in\mathbf{N}: \forall\ z$ si ha $x+z = z\}$
- L'insieme dei numeri dispari,
- $\{x\in\mathbf{N}: \exists\ z \in\mathbf{N}$ tale che $z = 2x\}$

1.2. Si definiscano con una proprietà quelli tra gli insiemi precedenti dei quali si sono elencati gli elementi.

2.Sottoinsiemi, unione, intersezione. Uguaglianze.

2.1. Dati gli insiemi $X = \{a,c,d\}$, $Y = \{a,b,d,e\}$, $Z = \{a,b\}$ quali delle seguenti espressioni sono corrette?

$Z\in Y$

$X\subset Y$

$a\in Z$

$a\subset X$

$(X\cup Z) \subset Y$

X∩Z ∈Y
Z⊆Y
X∩Z = a
Z⊂Y

2.2 . Dati gli insiemi:
A ={x∈**Z**: x ≥ 18, la divisione di x per 4 ha resto 2}, B = {x∈**Z**: ∃ *n*∈**Z** tale che (x-18) = 4*n*}, dimostrare che A=B.

2.3. Si dimostri che B∪C =∅ se e solo se B=∅ e C=∅.

2.4. Sia B un sottoinsieme di X. Si dimostri che se A∪B =A per ogni sottoinsieme A allora B = ∅.

2.5.Dimostrare che la legge di cancellazione è falsa. Ossia se A∪B = A∪C non necessariamente si ha B = C.

2.6. Dimostrare che l'unione (A∪B) di due sottoinsiemi di X è contenuta in tutti i sottoinsiemi di X contenenti sia A che B, mentre l'intersezione (A∩B) contiene tutti i sottoinsiemi di X contenuti sia in A che in B.

2.7. (A∪B)∩C è uguale ad A∪(B∩C)?

2.8. Siano X ed Y due insiemi tali che esiste un insieme Z per cui X∩Z = Y∩Z e X∪Z = Y∪Z, dimostrare che necessariamente X = Y.

2.9. Si considerino l'insieme A degli interi divisibili per 3, l'insieme B degli interi divisibili per 5, l'insieme C degli interi divisibili per 20. Determinare A∩B, A∪B, A∩B∩C, A∪B∪C, (A∩B)∪C e (A∪B)∩C.

3.Differenza.

Dato un insieme I e un sottoinsieme A di I, il complementare di A è l'insieme:
$\bar{A}$={ x∈ I: x∉A}.

3.1. Dimostrare che : $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ e $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$(De Morgan)

3.2. Dimostrare che $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

3.3. Differenza simmetrica Δ si definisce come segue: AΔB =(A-B)∪(B-A). Dimostrare che

$$(A\Delta B) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

3.4. Verificare che la differenza simmetrica è associativa, commutativa e soddisfa la proprietà distributiva rispetto all'intersezione ma non rispetto all'unione.

3.5. Definire una operazione analoga alla differenza simmetrica (ossia associativa e commutativa) che sia distributiva rispetto all'unione ma non rispetto all'intersezione.

3.6. Dimostrare che $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$ se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

3.7. Si dimostri che $A \subseteq B$ è equivalente ad ognuna delle seguenti condizioni:
i)$A\Delta B = B - A$,
ii) se A e B sono sottoinsiemi di X, $\bar{A} \cup B = X$.

3.8. Calcolare:
- $\overline{A \cap \bar{B}} \cup (B \cap C)$
- $\overline{\overline{(A \cap B) \cup C} \cap \bar{B}}$
- $((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup \overline{B \cap A}$

4.Prodotto cartesiano

4.1. E' vera l'identità (AxA)xA = Ax(AxA)? Ogni sottoinsieme di un prodotto cartesiano è un insieme prodotto?

4.2. Dei seguenti insiemi determinare quelli prodotto e indicarne i "fattori":

$\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,1)\}$, l'insieme dei punti della superficie di un cilindro, l'insieme dei punti della superficie di una piramide a base quadrata.

4.3. Verificare le seguenti identità:

$(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$

5. Relazioni, relazioni duali, relazioni d'ordine e di equivalenza.

Una <u>relazione</u> ρ <u>tra gli insiemi</u> $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è una terna $(\mathcal{A},\mathcal{B}, \mathcal{R}_\rho)$ dove $\mathcal{R}_\rho$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ (grafico della relazione).

5.1. Si rappresenti graficamente la relazione $x^2+y^2= 5$ tra numeri reali e la relazione $x^2+y^2= 5$ tra numeri interi.

5.2. Determinare una coppia di relazioni che siano la prima inclusa nella seconda.

5.3. Siano A=$\{$Lazio,Liguria,Puglia,Toscana,Sicilia,Sardegna$\}$ e B =$\{$Carbonia,Cesano,Imperia,Manfredonia,Narni,Orvieto,Parma,Piombino,Veroli$\}$, rappresentare graficamente la relazione "La città x appartiene alla regione y".

5.4. Rappresentare graficamente le relazioni R tra numeri reali definite da:

- $(x,y) \in R$ se e solo se $-1\leq x\leq 1/2$ e $1< y<2$
- $(x,y) \in R$ se e solo se $y=x^2$
- $(x,y) \in R$ se e solo se $x>y$
- $(x,y) \in R$ se e solo se $1\leq y\leq x$

5.5. Quando una relazione non è riflessiva? Quando non è simmetrica? Quando non è antisimmetrica? Quando non è transitiva?

Data una relazione ρ tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, la <u>relazione duale</u> (o inversa) di ρ è la relazione ρ^* tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ definita da: $b\,\rho^*\,a \Leftrightarrow a\,\rho\,b$.

5.6. Sia X = $\{-2, -1,0,1,2,3\}$, definire ρ^* essendo ρ la relazione su X definita da:

5.6.1. $x\,\rho\,y$ se e solo se $y =2x$

5.6.2. $x\,\rho\,y$ se e solo se $y =3x-3$

5.6.3. $x\,\rho\,y$ se e solo se $y -x=1$

Un <u>insieme parzialmente ordinato</u> è una coppia $(\mathcal{P},\leq)$ dove $\mathcal{P}$ è un insieme non vuoto e $\leq$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}$ (ossia una relazione riflessiva, antisimmetrica transitiva).

5.7. Posto A =$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, si rappresenti il diagramma di Hasse di $(A,|)$ e dell'insieme parzialmente ordinato duale.

5.8. Si consideri l'insieme B =$\{n\in\mathbf{N}: n= 2^r3^s$ con $r,s\in\mathbf{N}\}$. Dimostrare che la relazione ρ su B definita da:

$$(2^r3^s\ \rho\ 2^t3^u) \Leftrightarrow (r\leq t \text{ e } s\leq u)$$

è una relazione d'ordine. Considerati i sottoinsiemi di B: F=$\{2,4,12,16\}$ e G=$\{3,16,27,32\}$. Si rappresentino i diagrammi di Hasse degli insiemi parzialmente ordinati (F,ρ) e (G,ρ).

5.9. Determinare una relazione riflessiva e antisimmetrica ma non transitiva.

5.10. Determinare una relazione antisimmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Una <u>partizione</u> di $\mathcal{A}$ è un insieme di sottoinsiemi di $\mathcal{A}$ non vuoti, chiamati <u>blocchi</u> tale che ogni elemento di $\mathcal{A}$ appartiene ad un sol blocco.

5.11. Dato un insieme A, sia $\Pi(A)$ l'insieme delle partizioni di A , dimostrare che la relazione su $\Pi(A)$ definita da:

$$\pi \leq \sigma \Leftrightarrow \text{ogni blocco di } \pi \text{ è contenuto in un blocco di } \sigma$$

è una relazione d'ordine. Rappresentare il diagramma di Hasse di $(\Pi(A), \leq)$ con A =$\{1,2,3\}$.

5.12. Provare che se $\{B_i : i \in I\}$ è una partizione dell'insieme X e $\{C_j : j \in J\}$ è una partizione dell'insieme Y allora $\{B_i \times C_j : (i,j) \in I \times J\}$ è una partizione di $X \times Y$.

Una relazione di equivalenza su un insieme A è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Dato $a \in A$, l'insieme degli elementi di A equivalenti da a costituiscono la classe di equivalenza rappresentata da a. L'insieme delle classi di equivalenza A/ρ si chiama insieme quoziente ed è una partizione di A. L'insieme delle relazioni di equivalenza su A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni di A.

5.13. Si determini una relazione simmetrica, transitiva ma non riflessiva.

5.14. Si consideri in **Z** la relazione ρ definita da:

$$a \, \rho \, b \Leftrightarrow a=b \text{ o } a,b \in \mathbf{N}.$$

Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza su **Z** e determinare l'insieme quoziente.

5.15. Si consideri la relazione $\approx$ su **N**x**N** definita da:

$$(m,n) \approx (p,q) \Leftrightarrow m+q= n+p$$

Dimostrare che $\approx$ è una relazione di equivalenza il cui insieme quoziente ha la stessa cardinalità di **Z.**

5.16.Si consideri l'insieme B =$\{n \in \mathbf{N}: n=2^r3^s \text{ con } r,s \in \mathbf{N}\}$.Dimostrare che la relazione ρ su B definita da:

$$2^r3^s \, \rho \, 2^t3^u \Leftrightarrow r+s = t+u$$

è una relazione di equivalenza. Determinare le classi di equivalenza rappresentate dai seguenti numeri: 1,3,4,12. La relazione ρ' su B definita da:

$$2^r3^s \, \rho' \, 2^t3^u \Leftrightarrow r+u = s+t$$

È di equivalenza? Quale proprietà ha?

5.17. Sia ρ una relazione su A simmetrica e transitiva. Si provi che ρ è di equivalenza se e solo se: per ogni $a \in A$ esiste $b \in A$ tale che $a \, \rho \, b$.

5.18. Sia ρ una relazione A su Dimostrare che ρ è di equivalenza se e solo ρ^* è di equivalenza.

5.19. Si consideri la relazione $\approx$ su **Z**x**Z*** definita da:

$$(m,n) \approx (p,q) \Leftrightarrow mq= np$$

Dimostrare che $\approx$ è una relazione di equivalenza il cui insieme quoziente ha la stessa cardinalità di **Q**.

Una funzione $f: A \to B$ individua una relazione di equivalenza su A $\sim_f$ definita da: $x \sim_f z \Leftrightarrow f(x) = f(z)$, l'insieme quoziente si dice nucleo di f e si indica con Ker f.

5.20. Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2-1$, determinare l'immagine di f. Determinare il nucleo di f.

5.21. Dimostrare che una funzione f: $A \to B$ è iniettiva se e solo se $Ker\, f = 0$, dove 0 denota il minimo elemento di $(\Pi(A),\leq)$.