

CORSO DI ALGEBRA (A-L)

Prof. A. Venezia

2014-15

Complementi ed Esercizi

27/12/2014

1. AUTOVETTORI e AUTOVALORI di ENDOMORFISMI e MATRICI

Una applicazione lineare avente per dominio e condominio lo stesso spazio vettoriale V si dice *endomorfismo di V* .

PROPOSIZIONE 1.1. Siano V, V' e V'' spazi vettoriali sullo stesso campo K , e B, B', B'' le rispettive basi. Date due applicazioni lineari $L: V \rightarrow V'$ e $G: V' \rightarrow V''$, la matrice associata alla composta $G \circ L$ rispetto alle basi B e B'' è il prodotto della matrice associata a G rispetto alle basi B' e B'' per la matrice associata a L rispetto alle basi B e B' . In simboli:

$$M_{B''}^B(G \circ L) = M_{B''}^{B'}(G) M_{B'}^B(L).$$

Dim. Si ha per definizione di matrice associata ad una applicazione lineare :

$$1.1.1. (G \circ L)(v) = B'' M_{B''}^{B'}(G \circ L) X, \text{ dove } v = BX,$$

$$L(v) = B' X' = B' M_{B'}^B(L) X$$

$$G(v') = B'' M_{B''}^{B'}(G) X', \text{ dove } v' = B' X'.$$

Dunque:

$$(G \circ L)(v) = G(L(v)) = B'' M_{B''}^{B'}(G) M_{B'}^B(L) X,$$

pertanto confrontando con la (1.1.1): $M_{B''}^B(G \circ L) = M_{B''}^{B'}(G) M_{B'}^B(L)$. □

Dato un endomorfismo $L: V \rightarrow V$, si indichi con $M_B(L)$ la matrice associata ad L rispetto alla base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V (quindi la sua j -esima colonna è costituita dalle coordinate di $L(v_j)$ rispetto alla base B). Siano $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ un'altra base di V e $M_{B'}(L)$ la matrice associata ad L rispetto a B' , si ha la seguente identità:

$$M_{B'}(L) = M_{B'}^B(\text{id}) M_B(L) M_B^{B'}(\text{id})$$

dove $M_{B'}^B(\text{id})$ è la matrice associata all'endomorfismo identico rispetto alle basi B e B' e $M_B^{B'}(\text{id})$ è la sua inversa. Infatti dalla proposizione precedente si ha:

$$\begin{array}{ccccc}
 V \text{ con } B' & & L \leftrightarrow M_{B'}(L) & & V \text{ con } B' \\
 & \xrightarrow{\text{id}(V) \leftrightarrow M_{B'}^B(\text{id})} & & \xrightarrow{\text{id}(V) \leftrightarrow M_B^{B'}(\text{id})} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 V \text{ con } B & & L \leftrightarrow M_B(L) & & V \text{ con } B
 \end{array}$$

Due matrici quadrate dello stesso ordine A e A' si dicono *simili* se esiste una matrice P invertibile tale che $A' = P^{-1} A P$. Quindi due matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo sono simili. La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza (dimostrarlo!) e si ha la fondamentale caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 1.2. Dato uno spazio vettoriale V su K con $\dim V = n$, due matrici di ordine n ad elementi in K sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo di V .

Dim. Rimane da dimostrare che la condizione è necessaria. Sia dunque per ipotesi $A' = P^{-1} A P$ dimostriamo che A' e A rappresentano lo stesso endomorfismo di V . Sia B una base di V e sia L l'endomorfismo tale che $M_B(L) = A$. L'insieme $B' = B P$ è una base di K^n e le coordinate X' di un vettore rispetto a B' sono date da $X' = M_{B'}^{B'}(\text{id}) X = P^{-1} X$, da cui: $M_{B'}(L) = M_{B'}^{B'}(\text{id}) M_B(L) M_B^{B'}(\text{id}) = P^{-1} A P = A'$ cioè A' è la matrice che rappresenta L rispetto a B' . □

Pertanto:

1. Matrici simili hanno lo stesso rango (perché?).
2. Matrici simili hanno lo stesso determinante (dal Teorema di Binet).

Dim. 2.

Risulta: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (teorema di Binet). Dunque se A' e A sono matrici simili si ha: $A' = P^{-1} A P$, da cui $\det(A') = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P)$ e quindi la tesi poichè $\det(P^{-1}) \det(P) = 1$.

Sia $L: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Un *autovettore di L di autovalore λ* è un vettore v non nullo tale che $L(v) = \lambda v$. Lo scalare si dice *autovalore di L* relativo all'autovettore v .

L'insieme $E(\lambda) = \{ v \in V : L(v) = \lambda v \}$ è un sottospazio di V (dimostrarlo!) che è chiamato *autospazio* e la sua dimensione $m_g(\lambda)$ è detta *molteplicità geometrica dell'autovalore λ* . Si osservi che l'endomorfismo L ha come autospazio $E(0)$ se e solo se L non è iniettiva (e quindi se e solo se L non è un isomorfismo) e in tal caso risulta $E(0) = \text{Ker} L$.

Un autovettore di una matrice A di ordine n è un autovettore dell'endomorfismo L di K^n definito da A (ossia L è rappresentato da A rispetto alla base canonica di K^n) dunque un autovettore di A è una n -pla $X \neq \underline{0}$ tale che $AX = \lambda X$, lo scalare λ è un autovalore di A .

TEOREMA. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di L allora i relativi autospazi hanno somma diretta.

Dimostrare questo teorema usando il seguente:

LEMMA. Autovettori relativi ad autovalori a due a due distinti sono indipendenti.

Dim.

Siano v_1, \dots, v_t autovettori di L relativi rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ con $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ se $i \neq j$. Si indichi con h la dimensione dello sottospazio $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$. Non è restrittivo supporre che i primi h vettori siano quelli indipendenti. La tesi è $h = t$. Per assurdo supponiamo $h < t$, allora il vettore v_t è combinazione lineare degli autovettori v_1, \dots, v_h , cioè:

$v_t = a_1 v_1 + \dots + a_h v_h$, con $(a_1, \dots, a_h) \neq \underline{0}$ essendo v_t un autovettore.

Pertanto si ha:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_h \lambda_h v_h = a_1 L(v_1) + \dots + a_h L(v_h) = L(a_1 v_1 + \dots + a_h v_h) = L(v_t) = \lambda_t v_t = \lambda_t (a_1 v_1 + \dots + a_h v_h) = a_1 \lambda_t v_1 + \dots + a_h \lambda_t v_h$$

da cui: $a_1(\lambda_1 - \lambda_t) v_1 + \dots + a_h(\lambda_h - \lambda_t) v_h = \underline{0}$ con $(a_1, \dots, a_h) \neq \underline{0}$ e per ipotesi $(\lambda_i - \lambda_t) \neq 0$ per $i = 1, \dots, h$. Si è giunti ad un assurdo essendo i vettori v_1, \dots, v_h indipendenti. □

PROPOSIZIONE 1.3. Risulta: λ autovalore di $L \Leftrightarrow \det(M_B(L) - \lambda I) = 0$.

Dim. Infatti si ha: λ autovalore di $L \Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $L(v) = \lambda v \Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $L(v) - \lambda v = \underline{0} \Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $(L - \lambda \text{id})(v) = 0 \Leftrightarrow$ esiste $v \neq 0$ tale che $v \in \text{Ker}(L - \lambda \text{id}) \Leftrightarrow$ il sistema $(M_B(L) - \lambda I) X = 0$ ammette soluzioni non nulle $\Leftrightarrow \det(M_B(L) - \lambda I) = 0$. □

Si ha $\det(M_B(L) - \lambda I) = \det(M_{B'}(L) - \lambda I)$. Infatti se A è una matrice simile ad A' risulta: $\det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}) \det(AP - \lambda P) = \det(P^{-1}) \det((A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) = \det(P^{-1}) \det(P) \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.

Gli autovalori di un endomorfismo L sono quindi tutti gli zeri del polinomio $\det(M_B(L) - \lambda I)$ di grado n che si dice *polinomio caratteristico* di L . La molteplicità $m_a(\lambda)$ di λ come radice del polinomio caratteristico si dice *molteplicità algebrica di λ* e si ha:

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Pertanto un endomorfismo ha al più n autovalori contati con la loro molteplicità.

2. DIAGONALIZZAZIONE di ENDOMORFISMI e MATRICI

PROBLEMA 1. Dato un endomorfismo L di V esiste una matrice D diagonale che rappresenta L ? Ossia L è diagonalizzabile? Come è possibile eventualmente determinare D e la base B tale che $M_B(L) = D$?

PROBLEMA 2. Data una matrice A esiste una matrice D diagonale simile ad A ? Ossia A è diagonalizzabile? Come si determina D e la matrice P tale che $P^{-1}DP = A$? Si osservi che il problema 2 è un caso particolare del problema 1, in quanto diagonalizzare la matrice A significa diagonalizzare l'endomorfismo L di \mathbf{K}^n rappresentato da A rispetto alla base canonica.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- L'endomorfismo L di V ($\dim V = n$) è diagonalizzabile.
- Esiste una base di V costituita da autovettori di L .

- c) Lo spazio V è somma diretta degli autospazi di L .
 d) Ogni autovalore di L ha molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica. La somma di tutte molteplicità geometriche è uguale alla dimensione di V .

Dim. a) \Rightarrow b). Infatti se L è diagonalizzabile esiste una matrice D diagonale che rappresenta L rispetto ad una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V . Se $v_j \in B$ le coordinate di $L(v_j)$ sono date dalla j -esima colonna di D che nei posti (i,j) con $i \neq j$ ha 0. Quindi $L(v_j) = d_{jj} v_j$, cioè v_j è un autovettore di L per ogni $j = 1, \dots, n$.

Dim. b) \Rightarrow a). Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di autovettori di L , la matrice $M_B(L)$ è diagonale e sulla diagonale si trovano tutti gli autovalori di L .

Completare la dimostrazione. □

Quindi per diagonalizzare un endomorfismo L di V su K si procede come segue:

1. Si determina il polinomio caratteristico $\det(L - \lambda I)$ di L e si calcolano le sue radici $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ con le relative molteplicità $m_a(\lambda_i)$. Se il polinomio caratteristico non è riducibile in K in n fattori lineari contati con la loro molteplicità, allora L non è diagonalizzabile. Altrimenti:

2. Per ciascun autovalore λ_i si determina la dimensione $m_g(\lambda_i)$ del relativo autospazio $E(\lambda_i)$. Se $m_g(\lambda_i) \neq m_a(\lambda_i)$ per qualche autovalore λ_i allora L non è diagonalizzabile. Se invece $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, \dots, t$, allora:

3. Si determina una base B_i per ogni autospazio $E(\lambda_i)$. L'insieme $B = B_1 \cup \dots \cup B_t$ è una base di V costituita da autovettori di L e $M_B(L) = D$ è la matrice diagonale che rappresenta L . Si osservi che se l'endomorfismo L è definito assegnando una base C e la matrice $M_C(L)$ si ha: $M_C(L) = M_C^B(\text{id}) M_B(L) M_B^C(\text{id})$, cioè le matrici $M_C(L)$ e $M_B(L)$ sono simili e la matrice $P^{-1} = M_C^B(\text{id})$ ha per colonne le coordinate degli autovettori di L rispetto a C .

Per diagonalizzare una matrice quadrata M si procede seguendo i punti 1,2 e 3 e tenendo conto che in questo caso C è la base canonica di K^n ed L è l'endomorfismo di K^n associato ad M rispetto alla base canonica C .

ESEMPIO 1. Siano $V = \mathbf{R}_2[x]$ e L l'endomorfismo di V definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = 3a+3bx-(2a+3b)x^2$$

Determinare

- a) una matrice diagonale D che rappresenti L .
 b) la matrice P^{-1} tale che, indicata con A la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica B , risulti $A = P^{-1} D P$.
 c) la matrice A' che rappresenta L rispetto alla base $B' = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ e la matrice Q tale che $A' = Q^{-1} D Q$

Sol.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(M) = 2 = \dim \text{Im} L$, dunque L non è un isomorfismo e 0 è un suo autovalore.

Il polinomio caratteristico di L è $\det(A - \lambda I) = -\lambda(3 - \lambda)^2$. Quindi gli autovalori di L sono 0 e 3 con $m_a(0) = 1$ e $m_a(3) = 2$.

$E(0) = \text{Ker } L = \{v \in V : L(v) = 0\}$. Se $v \in E(0)$ le sue coordinate rispetto alla base canonica sono le soluzioni di $AX = 0$ e quindi $E(0) = \{a + bx + cx^2 : a=0, b=0\}$, $B_1 = \{x^2\}$ è una sua base e $m_g(0) = m_a(0) = 1$.

$E(3) = \{a + bx + cx^2 : -2a + 3b - 3c = 0\}$, l'insieme $B_2 = \{3/2 + x, -3/2 + x^2\}$ è una base di $E(3)$ e $m_g(3) = m_a(3) = 2$. L'insieme $B^\circ = B_1 \cup B_2 = \{x^2, 3/2 + x, -3/2 + x^2\}$ è una base di V costituita da autovettori di L e si ha:

$$M_B(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \quad \text{e} \quad P^{-1} = M_{B^\circ}^{B^\circ}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di Q^{-1} sono le coordinate dei vettori della base B° rispetto alla base B' , ossia:

$$x^2 = 1 - (1 - x^2); \quad 3/2 + x = 5/2 - (1 - x); \quad -3/2 + x^2 = -1/2 - (1 - x^2)$$

Pertanto:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A' = M_{B'}(L) = Q^{-1} D Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 2. Data la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori di A e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se esiste una matrice diagonale D simile ad A ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

Sol.

Gli autovalori di A sono gli zeri del polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda)$$

e dunque gli autovalori di A sono -2 e 4 , con $m_a(-2) = 2$ e $m_a(4) = 1$.

L'autospazio $E(-2)$ è costituito dalle soluzioni del sistema $(A + 2I)X = 0$, quindi:

$E(-2) = \{(x,y,z) : x = y-z\}$ e una base di $E(-2)$ è $\{(1,1,0); (1,0,-1)\}$, pertanto $m_a(-2) = m_g(-2) = 2$.

L'autospazio $E(4)$ è costituito dalle soluzioni del sistema $(A-4I)X = 0$, quindi $E(4) = \{(x,y,z) : x = y, z = 2y\}$ e una base di $E(4)$ è $\{(1,1,2)\}$, pertanto $m_a(4) = m_g(4) = 1$. La matrice data è dunque diagonalizzabile (per ogni autovalore la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica e la somma delle molteplicità è 3). Si ha :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad P = \frac{1}{\det(P^{-1})} \text{agg}(P^{-1}) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 1. Siano $V = \mathbf{R}_2[x]$ e L l'endomorfismo di V definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = 3a+b+c+(2a+4b+2c)x+(3a+3b+5c)x^2$$

Determinare

- il valore $L(1,1,-1)$ che l'applicazione assume in $(1,1,-1)$,
- gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

ESERCIZIO 2. Dimostrare che la matrice A e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori ma non necessariamente gli stessi autovettori.

ESERCIZIO 3. Sia $V = M_2(\mathbf{R})$ e sia L l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

- il valore $L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ che l'applicazione assume in $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
- una base del nucleo e una dell'immagine di L ,
- l'insieme $L^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$
- gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.