CORSO DI ALGEBRA (A-L)
Prof. A. Venezia
2014-15

Complementi ed Esercizi
5 Dicembre 2014

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Siano V e V' spazi vettoriali su **K** e siano B = $\{e_1,..,e_n\}$ una base di V (dim V= n) e B'= $\{e_1',..,e_m'\}$ una base di V'(dim V' = m). La matrice $M^B_{B'}$ (L) = A associata ad una applicazione lineare L : V $\rightarrow$ V' rispetto alle basi B e B' è la matrice mxn le cui colonne sono rispettivamente le coordinate rispetto alla base B' di $L(e_1),\ldots,L(e_n)$.
Usando la notazione matriciale, se X è la colonna delle coordinate rispetto a B di un vettore v di V si ha:

$$v = (e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BX.$$

Se A^1, …A^n sono rispettivamente le colonne delle coordinate rispetto a B' di $L(e_1),\ldots,L(e_n)$, si ha:

$$L(e_1) = B'A^1,\ldots,L(e_n) = B'A^n$$

e dunque

$$L(v) = x_1 L(e_1) +\ldots+ x_nL(e_n) = x_1 B'A^1+\ldots+ x_n B'A^n = B' (x_1 A^1+\ldots+ x_nA^n) = B'AX$$

Pertanto se X' è la colonna delle coordinate di L(v) rispetto a B', ossia L(v) =B'X', allora si ha X'= AX.
In particolare ogni matrice A$\in M_{mn}(\mathbf{R})$ determina una applicazione lineare L(A) : $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ definita da L(A)X= AX. L'immagine di L(A) è lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A, mentre il nucleo è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo AX = 0.

ESERCIZIO 1. Sia L : $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, l'applicazione lineare definita da:

$$L(a,b,c) = (c,b+a,c,c).$$

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:
- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}(basi cononiche)
- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B={(0,1,0);(0,0,1);(1,0,0)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}.

L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

ESERCIZIO 2. Sia L: $\mathbf{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:

- ✓ B ={(1,0);(0,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
- ✓ B ={(1,1);(2,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
- ✓ B = {(1,1);(2,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ESERCIZIO 3. Sia L **:** $\mathbf{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi:

B ={1+x; x+x^2; -x^2} e B' = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esprimere L(a+bx+cx^2) come combinazione lineare dei vettori della base canonica.
L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

ESERCIZIO 4. Determinare il nucleo e l'immagine delle seguenti applicazioni lineari:

a) L : $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, L (x,y,z) = (x+y, x+y, z+x, z+x)

b) L : $\mathbf{M_2(R)} \rightarrow \mathbf{M_2(R)}$, $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+z+y \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$

c) L: $\mathbf{M_2(R)} \rightarrow \mathbf{R_3[x]}$, $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = (d + (a+2b+c)x+ d x^2+(a+c+2d)x^3)

PROPOSIZIONE 1. (isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e la matrici). Siano V e V' spazi vettoriali su **K** e siano B = {e_1,..,e_n} una base di V (dim V= n) e B'= {e_1',..,e_m'} una base di V'(dim V'= m). Sia φ: Hom(V,V') → $M_{m,n}(\mathbf{R})$ applicazione lineare definita per ogni applicazione lineare L: V→ V'da: φ(L) è la matrice associata ad L rispetto alle basi B e B'. allora φ è un isomorfismo. Pertanto la dimensione dello spazio vettoriale Hom(V,V') è mn.

Dim.

Per le proprietà delle operazioni tra matrici si ha:

$$\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1)+ \varphi(L_2), \varphi(kL)= k\, \varphi(L).$$

L'applicazione lineare φ è iniettiva in quanto Ker φ ={$\underline{0}$}, infatti l'unica applicazione lineare che ha per matrice associata la matrice nulla è l'applicazione di costante valore $\underline{0}$. Inoltre φ è suriettiva in quanto data una matrice A, l'applicazione lineare L che al vettore v = BX di coordinate X associa L(v) = B'AX è tale che φ(L) =A.

□

PROPOSIZIONE 2. Siano V, V', V" spazi vettoriali sul campo **K** e B,B',B" le rispettive basi. Siano L_1: V→V' e L_2: V'→V" applicazioni lineari. Allora:

$$M^{B}_{B''}(L_2 \circ L_1) = M^{B'}_{B''}(L_2) \circ M^{B}_{B'}(L_1)$$

Dim.

Posto $A_1 = M^{B}_{B'}(L_1)$ e $A_2 = M^{B'}_{B''}(L_2)$, allora se v = BX, L_1(v) = B'A_1X e se v'= B'X' si ha L_2(v') = B"A_2X'. Si ha:

1.$(L_2 \circ L_1)(v) = B''\, M^{B}_{B''}(L_2 \circ L_1)X$.

2.$(L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)) = B''A_2(A_1X) = B''(A_2A_1)X$.

Confrontando 1 e 2 ed essendo univocamente determinata la n-pla delle coordinate, si ha $M^{B}_{B''}(L_2 \circ L_1) = A_2A_1$.

□

Dunque la matrice associata ad un isomorfismo L:V→ V'è invertibile e la sua inversa è la matrice associata ad L^{-1}: V'→ V, inversa di L.

ESERCIZIO 5. Determinare le inverse delle matrici $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 6. Determinare una applicazione lineare L: $\mathbf{R}^3$→ $\mathbf{R}^4$ la cui immagine Im L sia generata dai vettori: (1,2,0-4) e (2,0,-1,-3).

ESERCIZIO 7. Determinare una base dello spazio vettoriale Hom($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$).

Sia V uno spazio vettoriale su **K** e siano B e B' due basi di V. Allora per ogni vettore v di V si ha v = BX = B'X' dove X è la colonna delle coordinate di v rispetto a B e X' è la colonna delle coordinate di v rispetto a B'. Si ha :

$$(2.5.1)\ X' = AX$$

dove A è la matrice associata all'identità rispetto alle basi B e B'; tale matrice si dice *matrice di transizione dalla base* B *alla base* B'(o matrice del cambiamento di base) e la (2.5.1.) esprime le coordinate di un vettore rispetto alla base B' in funzione delle sue coordinate rispetto alla base B.

ESERCIZIO 8. Siano B = {(1,0);(0,1)} e B' = {(1,3);(2,5)} basi di $\mathbf{R}^2$.

i) Trovare la matrice di transizione dalla base B alla base B'.
ii) Trovare la matrice di transizione dalla base B' alla base B.
iii) Verificare che le due matrici sono una l'inversa dell'altra.
iv) Determinare la coordinate del vettore (-3,7) rispetto alla base B'.

ESERCIZIO 9. Dati i sottoinsiemi di $\mathbf{R}_2$[x]:

$$B = \{1+x+x^2, 1+x, 1\} \text{ e } B' = \{1-x,1,1-x^2\},$$

dimostrare che sono basi e determinare la matrice del cambiamento di base da B a B'e quella del cambiamento di base da B' a B. Verificare che sono una l'inversa dell'altra. Determinare le coordinate del vettore ($2+x-2x^2$) rispetto a B e a B'.

ESERCIZIO 10. Siano:

$$B = \{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}, \quad B' = \{1, t, \mathrm{sen}3t, \cos 3t\},$$

dimostrare che sono insiemi indipendenti.

Sia D l'operatore derivata. Trovare la matrice associata a D considerata come endomorfismo dello spazio generato da B ed inoltre la matrice associata a D considerata come endomorfismo dello spazio generato da B'.

ESERCIZIO 11. Date le applicazioni lineari

$$L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_2[x], \quad F: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^4$$

definite da:

$$L(a,b,c) = c + (a-c)x + (a+c)x^2, \quad F(a+bx+cx^2) = (c, a+b+c, a)$$

Determinare la matrice associata alla composta F•L rispetto alle basi canoniche.