CORSO DI ALGEBRA (A-L)
Prof. A. Venezia
2014-15

Complementi ed Esercizi
1/12/2014

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e V' spazi vettoriali sul campo **K**. Una applicazione L: V $\rightarrow$V' si dice *lineare* se:
1_{AL}. L(v+w) = L(v) + L(w), per ogni v e w in V,
2_{AL}. L(k v) = k L(v), per ogni scalare k e ogni vettore v.
Ossia una applicazione lineare è un morfismo di spazi vettoriali sullo stesso campo.

Tutte le applicazioni lineari hanno le seguenti proprietà:

a) $L(\underline{0}) = \underline{0}$
b) L'immagine del vettore $v = a_1v_1+ \ldots+a_tv_t$ è $L(v) = a_1 L(v_1) + \ldots a_tL(v_t)$.
c) Se S è un insieme dipendente di V allora L(S) è un insieme dipendente di V', cioè L muta insiemi dipendenti in insiemi dipendenti.
d) Se W è un sottospazio di V allora L(W) è un sottospazio di V', cioè L muta sottospazi in sottospazi.
e) Se W' è un sottospazio di V' allora L^{-1}(W') è un sottospazio di V.

Dim. di a).
L è un morfismo di gruppi e quindi come nel caso dei gruppi: $L(\underline{0}) + L(\underline{0}) = L(\underline{0}+\underline{0}) = L(\underline{0})$ da cui $L(\underline{0}) = \underline{0}$.
Dim. di c).
Dimostriamo che esiste una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo non banale. Poiché per ipotesi S è dipendente, esiste una combinazione lineare $a_1v_1+ \ldots+a_tv_t$ di vettori di S con i coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, supponiamo $a_1\neq 0$. Si ha:
$\underline{0} = L(\underline{0})$ = (per ipotesi) $L(a_1v_1+ \ldots+a_tv_t)$ = (per la b) $a_1L(v_1) + \ldots+a_tL(v_t)$. Quindi $a_1L(v_1) + \ldots+a_t L(v_t) = \underline{0}$, essendo $a_1\neq 0$, è la combinazione lineare cercata.
Dim. di e).
Siano w, v $\in L^{-1}$(W') allora L(w), L(v) $\in$W', poiché W' è un sottospazio L(w)+L(v) = L(w+v)$\in$W' e quindi w+v $\in L^{-1}$(W'). Analogamente kv $\in L^{-1}$(W').

Per definire una applicazione lineare L basta assegnare i valori che essa assume sui vettori di una base di V, infatti dimostriamo che :

TEOREMA: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e V' uno spazio vettoriale su K. Sia $B = \{v_1,\dots v_n\}$ una base di V e siano $w_1,\dots w_n$ n- vettori di V'. Esiste una sola applicazione lineare $L : V \to V'$ tale che

$$L(v_1) = w_1, \dots\dots L(v_n) = w_n$$

Dim.

L'applicazione $L : V \to V'$ definita per ogni vettore v di V da:

$$L(v) = x_1w_1+ \dots\dots+ x_nw_n ,$$

dove $x_1,\dots,x_n$ sono le coordinate di v rispetto a B, verifica le condizioni richieste. Tale applicazione lineare è unica. Infatti se $F : V \to V'$ è una applicazione lineare che associa ai vettori di B rispettivamente $w_1,..,w_n$ allora per ogni v di V risulta:

$F(v) = F(x_1v_1+ \dots\dots+ x_nv_n) = x_1F(v_1)+ \dots\dots+ x_n F(v_n) = x_1w_1+ \dots\dots+ x_nw_n = L(v)$.

□

ESERCIZIO 1. Sia $L : \mathbf{R}^2 \to M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare il valore che l'applicazione assume in un vettore generico (x,y) e in particolare in (-2,3). L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

Ogni applicazione lineare $L : V \to V'$ individua due sottospazi :

1. *Il nucleo* $\mathrm{Ker}\, L = \{ v \in V: L(v) = \underline{0} \}$, sottospazio di V,
2. *L'immagine* $\mathrm{Im}\, L = \{ v' \in V' : \text{esiste } v \in V \text{ tale che } L(v) = v'\}$, sottospazio di V'.

Il nucleo è legato alla caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive, mentre l'immagine alla caratterizzazione di quelle suriettive. Infatti risulta:

PROPOSIZIONE 1.

$$L \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, L = \{\underline{0}\}$$

$$L \text{ suriettiva} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, L = \dim V'$$

Dim.

Sia L iniettiva e sia $v \in \mathrm{Ker}\, L$ allora $L(v) = \underline{0} = L(\underline{0})$ e quindi, essendo L iniettiva, $v = \underline{0}$. Viceversa sia $\mathrm{Ker}\, L = \{\underline{0}\}$, siano v e w vettori di V tali che $L(v) = L(w)$. Si ha:

$\underline{0} = L(v) - L(w) = L(v-w)$

Dunque $(v-w) \in \mathrm{Ker}\, L =\{\underline{0}\}$ e quindi $v-w = \underline{0}$, ossia $v = w$.

□

Le applicazioni lineari biiettive si dicono *isomorfismi* e due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se è possibile stabilire tra di essi un isomorfismo. La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza nell'insieme degli spazi vettoriali sullo stesso campo.

Ogni applicazione lineare $L : V \to V'$ determina (come ogni funzione) una *relazione di equivalenza* ε su V definita da:

$$v \,\varepsilon\, w \text{ se e solo se } L(v) = L(w).$$

ESERCIZIO 2. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $v \varepsilon w$ se e solo se $v-w \in$ Ker L
2. $[\underline{0}]$ = Ker L
3. Per ogni $v \in V$: $[v] = v +$ Ker L
4. Tutte le classi di equivalenza sono in corrispondenza biunivoca.
5. L'insieme quoziente V/ε è isomorfo all'immagine di L.

TEOREMA (di omomorfismo per gli spazi vettoriali) Sia $L:V\rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Allora V/Ker L è uno spazio vettoriale isomorfo a Im L.
Dim. Esercizio.

PROPOSIZIONE 2. Un'applicazione lineare $L : V \rightarrow V'$ è iniettiva se e solo l'immagine L(S) di un insieme indipendente S è indipendente.
Dim.
Sia L un'applicazione lineare iniettiva e sia S un insieme indipendente. Sia:

$$a_1w_1+\ldots+a_tw_t = \underline{0}$$

una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo. Risulta:
$w_1 = L(s_1),\ldots, w_t = L(s_t)$ con $s_1,s_2,\ldots s_t \in S$. Pertanto risulta:

$$\underline{0} = a_1w_1+\ldots+a_tw = a_1 L(s_1)+\ldots+a_t L(s_t) = L(a_1s_1+\ldots+a_ts_t),$$

ossia $(a_1s_1+\ldots+a_ts_t)\in$Ker L e quindi, poiché L è iniettiva, si ha $(a_1s_1+\ldots+a_ts_t) = \underline{0}$.
Essendo S indipendente, ogni combinazione lineare di vettori di S uguale al vettore nullo ha coefficienti tutti nulli e quindi $a_1 =\ldots= a_t = \underline{0}$.
Viceversa se l'immagine di ogni insieme indipendente è un insieme indipendente, l'immagine L(v) di un vettore non nullo v non può essere il vettore nullo e dunque Ker L = $\{\underline{0}\}$.

$\square$

TEOREMA. Uno spazio vettoriale V su un campo **K** è isomorfo allo spazio vettoriale K^n se e solo se la sua dimensione è n.
Dim.
La condizione è evidentemente necessaria perché se due spazi vettoriali sono isomorfi allora l'immagine tramite l'isomorfismo di una base del dominio è una base del codominio e dunque i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. Per dimostrare che la condizione è sufficiente, occorre definire un isomorfismo da K^n in V. A tale scopo, si fissi una base $B = \{v_1,v_2,..,v_n\}$ di V, allora l'applicazione

$$T : \mathbf{K}^n \rightarrow V$$

che ad ogni vettore $(x_1,\ldots,x_n)$ associa il vettore $v = x_1v_1+... +x_nv_n$, ossia il vettore la cui n-pla delle coordinate rispetto a B è $(x_1,\ldots,x_n)$. T è un isomorfismo, infatti T è iniettiva in quanto essendo B una base l'unico vettore che corrisponde alla n-pla nulla è i vettore nullo. Inoltre è suriettiva essendo $\langle B\rangle = V$.

$\square$

Per il teorema precedente, si possono studiare proprietà di V usando $\mathbf{K}^n$, ad esempio l'indipedenza lineare di un sottoinsieme S di V, fissata una base B di V, può essere provata dimostrando che T(S) è indipendente.

PROPOSIZIONE 3. Sia $L:V\rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Se V ha dimensione finita *n* sussiste la relazione seguente:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, L + \dim \mathrm{Im}\, L$$

Dim. Se L è iniettiva, ossia $\mathrm{Ker}\, L = \{\underline{0}\}$, risulta V isomorfo a Im L e quindi dim V = 0 + dim Im L. Si supponga dunque $\mathrm{Ker}\, L \neq \{\underline{0}\}$ e sia $B_K = \{u_1,\dots,u_t\}$ una base di Ker L e sia $B = B_K \cup \{v_1,\dots,v_{n-t}\}$ una base di V contenente B_K (cfr. teorema del completamento). L'insieme $\{L(v_1),\dots,L(v_{n-t})\}$ è una base di Im L. Se $L(v) \in \mathrm{Im}\, L$, essendo v combinazione lineare dei vettori della base B, si ha:

$$L(v) = L(x_1u_1+\dots x_tu_t+ y_1v_1+\dots+ y_{n-t}v_{n-t}) = x_1L(u_1)+\dots+x_tL(u_t) +y_1L(v_1)+\dots+y_{n-t}L(v_{n-t})$$
$$= (\text{poiché } L(u_i) = \underline{0})\ \ y_1L(v_1)+\dots+ y_{n-t} L(v_{n-t}),$$

quindi $<\{L(v_1),\dots,L(v_{n-t})\}> = \mathrm{Im}\, L$. Inoltre se $\underline{0} = y_1L(v_1)+\dots+ y_{n-t}L(v_{n-t}) = L(y_1v_1+\dots+y_{n-t}v_{n-t})$ allora il vettore $v = y_1v_1+\dots+ y_{n-t}v_{n-t}$ appartiene a Ker L e quindi può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B_K, ossia $v= y_1v_1+\dots+ y_{nt}v_{n-t} = x_1u_1+\dots+x_tu_t$, da cui: $x_1u_1+\dots,x_t\, u_t-(y_1\, v_1+\dots+ y_{n-t}\, v_{n-t}) = \underline{0}$ e quindi, poiché B è indipendente, si ha: $x_1= \dots x_t = y_1 =\dots= y_{n-t} = 0$, ossia $\{L(v_1),\dots,L(v_{n-t})\}$è indipendente.

ESERCIZIO 3. Dato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2, i seguenti insiemi sono dipendenti o indipendenti? Quali costituiscono una base?

$$S_1= \{x^2+1, x-1, 1, 2x\};\ S_2 = \{x^2+x+1, x, 2\};\ S_3= \{x+x^2+1, x-1, 1+3x+2x^2\};$$
$$S_4 = \{x^2+x+1, x, \underline{0}\};\ S_5 = \{x^2+1,x-1, -1\};\ S_6 = \{x^2+x+1, x^2, 2\}.$$

Data una matrice $A\in M_{m,n}(\mathbf{K})$, si dice *trasposta di* A la matrice A^t che ha per righe le colonne di A, $(A=(a_{ij}),\ A^t=(a_{ji}))$.

ESERCIZIO 4. Sia $T : M_{m,n}(\mathbf{K})\rightarrow M_{n,m}(\mathbf{K})$ definita da $T(A) = A^t$. Dimostrare che T è un isomorfismo.

ESERCIZIO 5. Sia $L : M_2(\mathbf{K})\rightarrow M_2(\mathbf{K})$ definita da $L(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dimostrare che L è lineare e determinare Im L e Ker L.

ESERCIZIO 6. Sia $Tr : M_n(\mathbf{K})\rightarrow \mathbf{K}$ l'applicazione *traccia* definita da $Tr(A) = \sum_{i=1,\dots,n} a_{ii}$. Dimostrare che Tr è lineare e determinare Im L e Ker L.

ESERCIZIO 7. Si dimostri che i seguenti endomorfismi di $\mathbf{R}^3$sono isomorfismi e determinarne l'inversa:

i. $L(x,y,z) = (x-3y-2z,y-4z,z)$
ii. $L(x,y,z) = (x+z, x-z,y)$