CORSO di ALGEBRA (M-Z)
2013-14

PROVA INTERMEDIA
13-11-2013

Soluzioni

Svolgere gli esercizi mostrando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi.

1. Quanti “anagrammi” anche privi di senso si possono formare dalla parola TRASCENDENTE? Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze TRA, CED, ENT?

Soluzione.
Il numero degli “anagrammi” della parola TRESCENDENTE è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{12} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale a $\frac{12!}{3!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza TRA,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza CED,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ENT,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una delle sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Risulta:

$$|A| = \frac{10!}{3!2!},\ |B| = \frac{10!}{2!2!2!},\ |C| = \frac{10!}{2!} - \frac{8!}{2!}.$$

infatti un elemento di C si ottiene anagrammando la parola (ENT)ACDEENRST, dove la sequenza ENT è considerata una lettera, ma quelli che sono anagrammi di (ENT)(ENT)AOPR sono contati due volte. Inoltre:

$$|A\cap B| = \frac{8!}{2!2!},\ |A\cap C| = 2\,\frac{8!}{2!} - 6!\ ,\ |B\cap C| = 8! - \frac{6!}{2!}.$$

L’insieme $(A\cap C)$ è l’unione dell’insieme X delle parole ottenute anagrammando la parola (TRA)(ENT)CDEENS e con l’insieme Y delle parole ottenute anagrammando la parola (ENTRA)CDEENST, quindi per il principio di inclusione-esclusione si ha $|A\cap C| = |X| + |Y| - |X\cap Y|$. Gli elementi dell’insieme $(B\cap C)$ sono gli anagrammi della parola (CED)(ENT)AENRST , dunque a 8! occorre sottrarre il numero degli anagragammi della parola (CED)(ENT)(ENT) ARS.
Infine $(A\cap B\cap C)$ è l’unione dell’insieme Z delle parole ottenute permutando le lettere (TRA),(CED),(ENT),E,N,S, con l’insieme K degli anagrammi della parola

(ENTRA)(CED)ENS, dunque $|A\cap B\cap C| = |Z|+|K|-|Z\cap K|$ e quindi:

$$|A\cap B\cap C| = 6!+6! - 4!$$

Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|A\cup B\cup C|= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

2. Si consideri nell'insieme $\mathbf{N}^2$ l'operazione + definita da:

$$(m,n) + (p,q) = \text{(definizione)}\ (m+p,\ n+q).$$

Dati $a,b \in \mathbf{N}$, si denoti con $f_{a,b}$ la funzione da $\mathbf{N}^2$ in $\mathbf{N}$ definita come segue :

per ogni coppia $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ $f_{a,b}\,((m,n)) = a^m b^n$.

Dimostrare che:

a) $f_{a,b}$ è un morfismo di strutture algebriche da $(\mathbf{N}^2,+)$ in $(\mathbf{N}, \cdot)$,
b) se a e b sono coprimi ed entrambi maggiori di 1, allora $f_{a,b}$ è iniettiva,
c) $f_{a,b}$ non è in generale iniettiva.

L'applicazione $f_{a,b}$ è un morfismo di monoidi? È suriettiva?

Soluzione.

Si ha: $f_{a,b}\,((m,n) + (p,q)) = f_{a,b}(m+p,n+q) = a^{m+p}b^{n+q} = a^m b^n\ a^p b^q = f_{a,b}\,(m,n)\ \ f_{a,b}\,(p,q)$, quindi $f_{a,b}$ è un morfismo di strutture algebriche.

Se a e b sono coprimi ed entrambi maggiori di 1, allora $f_{a,b}\,(m,n) = f_{a,b}\,(p,q)$ implica $a^m b^n = a^p b^q$ da cui $a^{m-p} = b^{q-n}$ ossia $m-p = q-n = 0$, quindi $m = p$ e $n = q$.

Per esempio $f_{3,3}$ non è iniettiva infatti $f_{3,3}(2,3)= f_{3,3}(3,2)$.

L'applicazione $f_{a,b}$ è un morfismo di monoidi in quanto $f_{a,b}(0,0) = a^0\ b^0 = 1$. Infine $f_{a,b}$ non è suriettiva in quanto un intero primo con a e b non appartiene all'immagine di $f_{a,b}$.

3. Si determini tramite l'algoritmo di Euclide il massimo comune divisore d tra 444 e 201. Si esprima d come combinazione lineare di 444 e 201 (identità di Bézout). La classe di 201 in $\mathbf{Z}/\equiv_{444}$ ammette un inverso moltiplicativo? In caso affermativo determinarlo. Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbf{Z}_{444},+,\cdot)$?

Soluzione

Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 401 e 201 è il seguente:

$444= 201(2)+42$	$42=444-201(2)$
$201=42(4)+33$	$33=201-42(4)$
$42=33+9$	$9=42-33$
$33=9(3)+6$	$6=33-9(3)$
$9=6+3$	$3= 9-6$
$6=3(2)$	

Dunque d = 3 (ultimo resto non zero). Calcolo di un'identità di Bèzout:

$3 = 9-6 = 9-[33-9(3)] = 9(4) -33 = [42-33](4) -33 = 42(4) -33(5) =$
$42(4) -[201-42(4)](5) = 42(24) -201(5) = [444-201(2)](24) -201(5) =$
$444(24) -201(53)$. Pertanto un'identità di Bézout è:

$$444(24)+201(-53) = 3.$$

In $\mathbf{Z}/\equiv_{444}$ la classe [201] non è invertibile poiché gli elementi invertibili sono rappresentati da interi primi con 444. La struttura algebrica $(\mathbf{Z}_{444},+,\cdot)$ è un anello commutativo unitario con divisori dello zero.

4. Determinare un elemento x nel gruppo simmetrico S_8 tale che

$$\gamma x\beta = \gamma\beta\alpha$$

dove $\alpha = (135)(456)(248)$, $\beta = 52314786$, $\gamma = (2837)$. Determinare inoltre una decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità di x.

Soluzione.

Poiché S_8 è un gruppo, moltiplicando a sinistra per γ^{-1} e a destra per β^{-1} si ottiene:

$$x = \beta\alpha\beta^{-1}$$

La permutazione β è rappresentata dalla parola 52314786 e dunque la sua inversa è 42351867. La permutazione α è rappresentata come prodotto di cicli(non disgiunti!) e quindi α = 31586472. Pertanto $\alpha\beta^{-1}$ = 81563247 e x = 65473218. Una decomposizione in cicli disgiunti di x è x = (1625347)(8). L'ordine di x è la cardinalità del gruppo generato da x ed è il minimo comune multiplo della lunghezza dei suoi cicli ossia 7, infine x è una permutazione pari (una permutazione con t cicli è pari se $\sum_{j=1}^{t}(i_j - 1)$ dove i_j indica la lunghezza del ciclo j-esimo).