CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2013-14

Complementi ed Esercizi

Novembre 2013

SPAZI VETTORIALI: prime proprietà.

DEFINIZIONE 1. *Uno spazio vettoriale sul campo* **K** è una struttura algebrica $(V,+,\cdot)$, dove $\cdot$ è una operazione esterna $\cdot : \mathbf{K} \times V \to V$, tale che:

1. $(V,+)$ è un gruppo abeliano.
2. Per ogni $k \in \mathbf{K}$, $v,w \in V$: $k(v+w) = kv+kw$ (distributiva rispetto alla somma vettoriale).
3. Per ogni $k, h \in \mathbf{K}$, $v \in V$: $(k+h)v = kv+hv$ (distributiva rispetto alla somma di scalari).
4. Per ogni $k,h \in \mathbf{K}$, $v \in V$: $(kh)v = k(hv) = h(kv)$.
5. Per ogni $v \in V$: $1v = v$

In uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo **K**, il vettore nullo è necessariamente unico e per ogni vettore è anche unico il suo opposto. Inoltre si ha:

1. Per ogni vettore v : $0\,v = \underline{0}$
2. Per ogni scalare k : $k\,\underline{0} = \underline{0}$
3. Per ogni vettore v e per ogni scalare k : $k(-v) = -kv = (-k)\,v$
4. $k\,v = \underline{0} \Leftrightarrow k = 0$ oppure $v = \underline{0}$.

Dim.1.

Risulta: $0v = (0+0)v =$ (distributiva) $0v + 0v$. Poiché ogni vettore ha un opposto, dalla uguaglianza precedente sommando ad entrambi i termini $-0v$ si ricava.

$\underline{0} = 0v-0v = (0v + 0v)-0v = 0v+(0v-0v) = 0v + \underline{0} = 0v$

Dim. 3

$k(-v) + k\,v = k\,(v-v) = k\,\underline{0} = \underline{0}$ dunque $k(-v)$ è l'opposto di kv e cioè $k(-v) = -kv$

$(-k)v + kv = (k-k)\,v = 0v = \underline{0}$, cioè $(-k)\,v = -kv$

□

ESERCIZIO 1. Dimostrare che le seguenti strutture algebriche, dove + e $\cdot$ indicano rispettivamente le operazioni naturali di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali su **R**: $(M_{m,n}(\mathbf{R}), +,\cdot)$, $(\mathbf{R}^n, +,\cdot)$, $(\mathbf{R}[x],+,\cdot)$, $(\mathbf{R}^X,+,\cdot)$ con X insieme non vuoto.

DEFINIZIONE 2. Il vettore v si dice *combinazione lineare dei vettori* $v_1,\dots v_n$ se esistono n scalari $a_1,\dots a_n$ tali che $v = a_1v_1+\dots+a_nv_n$.*CNES affinché un sottoinsieme* W *non vuoto di uno spazio vettoriale* V *sia un sottospazio è*:

per ogni a,b$\in$ **K** *e per ogni* w,u $\in$W *allora* aw+bu $\in$ W.

ESERCIZIO 2. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sono sottospazi ?

A = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(1/2) = 0}
B = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(x) è pari per ogni x}
C = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(0) = f(1)}
D = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(1) = 0}
E = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(0) = $f(1)^2$}
F = { f $\in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: f(2) - 3f(1) = 0}

Il sottoinsieme $\sum$(S) *costituito da tutte le combinazioni lineari di elementi di* S *è un sottospazio.*

L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio, *l'unione di due sottospazi* W *e* U *è un sottospazio se e solo se* W $\subseteq$ U *oppure* U $\subseteq$ W.

Dim.

Supponiamo che W $\cup$ U sia un sottospazio. Si deve quindi dimostrare che se W non è un sottoinsieme di U allora necessariamente U deve essere un sottoinsieme di W. Infatti sia u $\in$ U . Poiché W non è contenuto in U, esiste un vettore w di W non appartenente ad U. Si ha u, w$\in$ W $\cup$ U e quindi essendo l'unione un sottospazio il vettore u + w$\in$ W $\cup$U . Il vettore v = u + w non può appartenere ad U (altrimenti v-u = w $\in$ U) e quindi appartiene a W, per cui u = v-w $\in$ W. Si è dunque dimostrato che ogni vettore u di U appartiene anche a W , cioè U $\subseteq$ W.

Ovviamente se W $\subseteq$ U, si ha W $\cup$ U = U e quindi l'unione è un sottospazio.

□

DEFINIZIONE 3. *Il sottospazio* <S> *generato dal sottoinsieme S* è l'intersezione di tutti i sottospazi contenenti S.

Il sottospazio <S> *generato dal sottoinsieme S è uguale* $\sum$(S).

ESERCIZIO 3. Dimostrare che la *somma* (U + W) *di due sottospazi* U e W definita da:

$$(U + W)=\{ v \in V : v = u + w \text{ con } u \in U \text{ e } w \in W\}$$

è uguale al sottospazio <(U $\cup$ W)> generato da (U $\cup$ W).

La somma (U + W) *si dice diretta, e si indica con* (U $\oplus$ W), *se per ogni vettore* v *di* (U + W) *esiste un solo vettore* u *in* U *e un solo vettore* w *in* W *tale che* :

$$v = u + w.$$

In altre parole la somma si dice diretta se, per ogni vettore v di U +W, l'identità :

v = u +w = u'+w' con u,u'$\in$ U e w, w'$\in$ W. implica u = u' e w = w'.

La somma di due sottospazi (U +W) *è diretta se e solo se* $U \cap W = \{ \underline{0}\}$

Dim.

Supponiamo che la somma sia diretta. Sia $v \in U \cap W$, se v non fosse il vettore nullo $v = v + 0$ e $v = 0 + v$ sarebbero due modi di scrivere v come somma di un vettore di U e uno di W. Supponiamo viceversa $U \cap W = \{ \underline{0} \}$ e sia $v = u + w = u' + w'$ con $u,u' \in U$ e $w, w' \in W$. Il vettore $u - u' = w'-w \in U \cap W$ e quindi $u-u' = w'-w = \underline{0}$, cioè $u = u'$ e $w = w'$.

□

ESEMPIO . Sia $(M_n(\mathbf{R}),+,\cdot)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n.

Data una matrica $A = (a_{ij})$ si dice *trasposta di* A, e si indica con A^t, la matrice le cui righe sono le colonne di A, cioè $A^t = (a_{ji})$. Risulta:

$$(A+ B)^t = A^t+ B^t \text{ e } (kA)^t = kA^t$$

Una matrice $A = (a_{ij})$ dice *simmetrica* se $A = A^t$ e si dice *antisimmetrica* se $A = -A^t$.

L'insieme U delle matrici simmetriche e l'insieme W delle matrici antisimmetriche sono sottospazi di $M_{nn}(\mathbf{R})$ (dimostrarlo !) e si ha :

$$M_{nn}(\mathbf{R})= U \oplus W \text{ (dimostrarlo!)}$$

L'insieme $\mathscr{S}$(V) *dei sottospazi di* V *è un reticolo rispetto all'inclusione dove*:

$$W \vee U = W + U \quad \text{e } W \wedge U = W \cap U.$$

ESERCIZIO 3.

Dati i sottospazi T, U, W di uno spazio vettoriale, dimostrare che, se T è un sottoinsieme di W, allora:

$$T + (U \cap W) = (T+ U) \cap W$$

Dim.

Sia v un vettore di $T + (U \cap W)$, allora $v = t + v'$ dove $t \in T$ e $v' \in U \cap W$. Quindi si ha: $v = t + v'$ con $t \in T$ e $v' \in U$, cioè $v \in T + U$. Inoltre v è la somma di due vettori di W ($t \in T \subseteq W$ per ipotesi e $v' \in W$) e quindi v è un vettore di W. Pertanto $v \in (T+U) \cap W$. Analogamente si dimostra che

$$(T+U) \cap W \subseteq T + (U \cap W)$$

□

ESERCIZIO 4. Dimostrare che il reticolo $(\mathscr{S}(V), \subseteq)$ non è distributivo.

ESERCIZIO 5. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo **K** dimostrare che l'insieme dei sottospazi di V con la relazione di inclusione è un reticolo.

ESERCIZIO 6. Per ogni spazio vettoriale elencato nell'esercizio1, determinare due sottospazi la cui somma è diretta ed è uguale a tutto lo spazio vettoriale.

ESERCIZIO 7. Si consideri il sottoinsieme S = {(2,0,0); (0,-3,0)} dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$. Si determini <S> e si dimostri che il vettore (5,-2,0) ne è un elemento.

ESERCIZIO 8. Per ciascuno dei sottoinsiemi seguenti si stabilisca se è un sottospazio di $(\mathbf{Z}_7)^4$:

$W_1 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c+d = 0\}$

$W_2 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c = 0\}$

$W_3 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b = 0\}$

$W_4 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a= 0\}$

$W_5 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d\}$

$W_6 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d +1\}$

ESERCIZIO 9. Dati i sottoinsiemi :

$$W = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : b = 0\} \text{ e } U = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : a + d = 0\}$$

Dimostrare che sono sottospazi di $\mathbf{R}^4$ e determinare $W \vee U$ e $W \wedge U$.