

# CORSO di ALGEBRA (M-Z)

## PROVA SCRITTA

11-06-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi non di esercizi.

### Parte I

**ESERCIZIO 1.1.** Determinare il numero degli “anagrammi” (anche privi di senso) della parola MONOCROMO. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: OMO, CRO, MON.

**ESERCIZIO 1.2.** Scrivere le tavole moltiplicative dei tre gruppi:

$$(U(\mathbf{Z}_5), \cdot), (U(\mathbf{Z}_8), \cdot), (U(\mathbf{Z}_{10}), \cdot),$$

dove  $U(\mathbf{Z}_n)$  denota l'insieme degli elementi invertibili dell'anello  $\mathbf{Z}_n$ .

Determinare quali tra questi sono isomorfi esplicitando gli isomorfismi.

### Parte II

**ESERCIZIO 2.1.** Si consideri l'endomorfismo  $f_k : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  dello spazio vettoriale  $\mathbf{R}^3$  definito da:

$$f_k(x,y,z) = (x+y+kz, x+ky, 2x+(k+1)y+kz).$$

Determinare al variare del parametro  $k$  in  $\mathbf{R}$ :

- una base di  $\text{Im}f_k$  e una base di  $\text{Ker}f_k$ ,
- l'insieme  $f^{-1}(0,2,2)$ .

**ESERCIZIO 2.2.** Sia  $L : \mathbf{R}_2[t] \rightarrow \mathbf{R}_2[t]$  l'endomorfismo dello spazio vettoriale  $\mathbf{R}_2[t]$  dei polinomi di grado  $\leq 2$  definito da:

$$L(a+bt+ct^2) = (a+3c)+(-a+2b-c)t+(3a+c)t^2$$

Determinare:

- la matrice  $A$  associata ad  $L$  rispetto alla base canonica,
- gli autovalori di  $L$  e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se  $L$  può essere rappresentata da una matrice diagonale  $D$  ed eventualmente trovare una matrice  $P$  tale che  $A = P^{-1}DP$ .