CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
04-02-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti delle lezioni e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola PASSEGGIATA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: PAG, AGA, GAP.

Sol. Il numero degli "anagrammi" della parola PASSEGGIATA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{11} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{11!}{3!2!2!}$ ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza PAG,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza AGA,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza GAP,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, numero che si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Risulta:
$|A| = \frac{9!}{2!2!}$, $|B| = \frac{9!}{2!} - \frac{7!}{2!}$, $|C| = \frac{9!}{2!2!}$, $|A\cap B| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}$, $|B\cap C| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}$, $|A\cap C| = \frac{7!}{2!}$.
Si osservi che una parola di B che contiene la sequenza AGAGA si può considerare formata da (AGA)GA o da AG(AGA). L'insieme $(A\cap B)$ è uguale all'insieme $(H\cup K)$ dove H è l'insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (PAG)(AGA)EISST e K è l'insieme degli anagrammi della parola (PAGA)AEGISST e $(H\cap K)$ è costituito dagli anagrammi della parola (PAGAGA)EISST. Pertanto:

$$|A\cap B| = |H\cup K| = |H| + |K| - |H\cap K| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}.$$

Anche l'insieme $B\cap C$ è unione dell'insieme degli anagrammi della parola (AGA)(GAP)EISST con l'insieme degli anagrammi della parola (AGAP)AGEISST, tali insiemi hanno in comune gli anagrammi della parola (AGAGAP)EISST.
Infine l'insieme $A\cap B\cap C$ è l'insieme delle parole ottenute anagrammando la parola (GAPAGA)EISST e la parola (AGAPAG)EISST per cui: $|A\cap B\cap C| = 2\,\frac{6!}{2!}$.
Quindi per il principio di inclusione-esclusione si ha:
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C| = 2\frac{9!}{2!2!} + \frac{9!}{2!} - 4\frac{7!}{2!} - 2\frac{8!}{2!} + 4\frac{6!}{2!}$.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri m = 522 e n = 1785, determinare :

a) il MCD(522,1785) mediante l'algoritmo di Euclide,

b) una identità di Bézout,
c) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{1785}$: 522 x =408.

Sol. L'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 522;1785 è il seguente:

1785 =522 (3) + 219	219 = 1785−522(3)
522 = 219(2) + 84	84 = 522− 219(2)
219 = 84(2) + 51	51 = 219− 84(2)
84 = 51 + 33	33 = 84−51
51 = 33 + 18	18 = 51−33
33 = 18 + 15	15 = 33− 18
18 = 15 + 3	3 = 18−15
15 = 3(5)	

Pertanto il MCD(522,1785) = 3 essendo questo l'ultimo resto non zero.
L'identità di Bézout si ottiene nel seguente modo:
3 = 18−15 = 18 −(33 − 18)= 18(2) −33 = (51−33)(2) −33 = 51(2)−33(3) = 51(2)−(84−51)(3) = 51(5) −84(3) = (219 −84(2))(5) −84(3) = 219(5) −84(13) =219(5) −(522−219(2) = 219(7) −522(2) = (1785 −522(3))(7) −522(2) =

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = <\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}>$$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} -h-3k-4t & h+t \\ 4h+3k+7t & h-4k-3t \end{pmatrix} : h,k,t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Determinare:
a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio (W∩U) e la sua dimensione.
c) il sottospazio (W+U) e la sua dimensione.

Sol. La base canonica di $M_2(\mathbf{R})$ è:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Sia A la matrice avente per righe le coordinate rispetto alla base canonica dei vettori che generano W, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -6 & 8 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R$$

da cui r(A) = 3 = dim W. Pertanto una base di W è l'insieme :

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Per $h = 1$, $k = 0$, $t = 0$ si ottiene il vettore di U : $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, per $h = 0$, $k = 1$, $t = 0$ si ottiene il vettore di U: $u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, infine per $h = 0$, $k = 0$, $t = 1$ si ottiene il vettore di U: $u_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$. Per determinare la dimensione di U si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$M \sim_R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi r(M) = 2 = dim U e una base di U è l'insieme:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}; \right\}$$

e l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow U$ definita da $L(1,0,0) = u_1$, $L(0,1,0) = u_2$ e $L(0,0,1) = u_3$ non è un isomorfismo. Per determinare $W+U = \langle B_W \cup B_U \rangle$ si consideri la matrice le cui righe sono le coordinate dei vettori di $B_W \cup B_U$, si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim_R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto $(W+U) = M_2(\mathbf{R})$

Per la formula di Grassmann si ha:

dim W + dim U = 3+2 = dim (W+U) + dim (W∩U) = 4 + dim(W∩U).

Dunque dim(W∩U) = 1 ed essendo $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in (W\cap U)$, una base di (W∩U) è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x, -2x+5y, -2x+5z)$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,

b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

Sol. La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1). Si ha: L(1,0,0) = (1,-2,-2); L(0,1,0)) = (0,5,0); L(0,0,1) = (0,0,5) e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di L sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\,(5-\lambda)^2$$

Dunque L ha due autovalori distinti : 1 e 5 e si ha $m_a(1)$ =1 e $m_a(5)$ = 2.

L'autospazio E(1) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo: (A−I) X= 0. Si ha :

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -2 & 5-1 & 0 \\ -2 & 0 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R$$

$\sim_R \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi il sistema ((A−I)X = 0 è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(1) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2z,\ y = z\}$$

e si ha: $m_g(1)$ = dim E(1) = 1. Una base di E(1) è {(2,1,1)}.

L'autospazio E(5) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo: (A−5I) X= 0. Si ha:

$$(A-5I) = \begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 0 \\ -2 & 5-5 & 0 \\ -2 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema ((A−5I)X = 0 è equivalente al sistema:

$$\{x = 0$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(5) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0\}.$$

Dunque $m_g(3)$ = dim E(3) = 2 e una base di E(3) è {(0,1,0); (0,0,1)}.

Pertanto l'endomorfismo dato è diagonalizzabile in quanto è definito su uno spazio vettoriale di dimensione 3 e risulta $m_g(1) + m_g(5) = 3$. La matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rappresenta L rispetto alla base di autovettori; {(2,1,1); (0,1,0); (0,0,1)}.
La matrice P tale che A = $P^{-1}DP$ è l'inversa della matrice P^{-1} che rappresenta l'identità rispetto alla base di autovettori B_a ={(2,1,1); (0,1,0); (0,0,1)} e alla base canonica, dunque le colonne di P^{-1} sono le coordinate degli autovettori di B_a rispetto alla base canonica, ossia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \frac{1}{\det(P)} \operatorname{Agg}(P^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$