CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
18-01-2013

Soluzioni

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola TERRAZZAMENTO. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: TERO, ROZA, MENT.

Sol. Il numero degli "anagrammi" della parola TERRAZZAMENTO è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{13} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{13!}{2!2!2!2!2!}$ ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza TERO,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ROZA,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza MENT,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, numero che si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Risulta:

$$|A| = \frac{10!}{2!2!}, \ |B| = \frac{10!}{2!2!}, \ |C| = \frac{10!}{2!2!}, \ |A\cap B| = 8!, \ |B\cap C| = 7!, \ |A\cap C| = \frac{7!}{2!2!} + \frac{7!}{2!2!}.$$

Infatti l'insieme $A\cap B$ è costituito dalle parole ottenute permutando TEROZA,T,E,R,A,Z, M,N; mentre un elemento dell'insieme $B\cap C$ si ottiene permutando ROZA, MENT, T,E,R,Z,A. Invece un elemento dell'insieme $A\cap C$ si ottiene sia anagrammando la parola (TERO)(MENT)RAAZZ sia anagrammando la parola (MENTERO)TRZZAA.
Infine l'insieme $A\cap B\cap C$ è l'unione dell'insieme X delle parole ottenute permutando TEROZA, MENT, R,A,Z con l'insieme Y delle parole ottenute permutando MENTEROZA T,R,A,Z; per cui: $|A\cap B\cap C| = 5!+5!$.
Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C| +|A\cap B\cap C| = 3\frac{10!}{2!2!} -8!-7!-2\frac{7!}{2!2!} +5!+5!.$$

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri $m = 39$ e $n = 603$, determinare :
a) il MCD(39,603) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{603}$ $39x =12$.

Sol. Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 603 e 39 è il seguente:

603 = 39 (15) +$\underline{18}$, $\underline{18}$ = 603-39(15),
39 = 18 (2) + $\underline{3}$,   3 = 39- 18(2)
18 = 3(6)
Dunque si ha: MCD(39,603) = 3, pertanto l'equazione in $\mathbf{Z}_{603}$: 39x = 12 è compatibile: infatti MCD(39, 603) = 3 e 3 divide 12.
Per calcolare le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{603}$ 39x = 12, si divide per 3 , ottenendo l'equazione in $\mathbf{Z}_{201}$: 13x = 4. Quest'ultima equazione ha una sola soluzione in $\mathbf{Z}_{201}$ Infatti, essendo MCD(13,201) = 1, si ha: x = $[13]^{-1}[4]$. Quindi occorre calcolare l'inverso di 13 in $\mathbf{Z}_{201}$. A tale scopo si consideri l'identità di Bézuot relativa a 13 e 201 seguente: $1 = 31 \cdot 13 - 2 \cdot 201$. Passando in $\mathbf{Z}_{201}$ si ottiene:
$[1] = [31] \cdot [13] – [2 \cdot 201] = [31] \cdot [13] +0 = [31] \cdot [13]$.
Segue che $13 \cdot 31 \equiv 1$ (*mod* 201) e pertanto x = $[13]^{-1}[4] = [31]\,[4] = [124]$.
Quindi l'equazione in $\mathbf{Z}_{603}$: 39x = 12 ha tre soluzioni 124, 325, 526 che sono le tre classi di congruenza (*mod* 603) in cui si ripartisce la classe $[124]_{201}$:
$[124]_{201} = [124]_{603} \cup [124+ \frac{603}{3}]_{603} \cup [124+ 2\,\frac{603}{3}]_{603}$

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = <\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}>$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2h+k \\ -3h+2k & -h+k \end{pmatrix} : h,k \in \mathbf{R} \right\}.$$

Determinare:
a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio (W∩U) e la sua dimensione.
c) il sottospazio (W+U) e la sua dimensione.

Sol. La base canonica di $M_2(\mathbf{R})$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia A la matrice avente per righe le coordinate rispetto alla base canonica dei vettori che generano W, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

da cui $r(A) = 4 = \dim W$. Pertanto $W = M_2(\mathbf{R})$.

Per $h = 1$ e $k = 0$ si ottiene il vettore di U : $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, per $h = 0$ e $k = 1$ si ottiene il vettore di U : $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. I vettori u_1 e u_2 non sono proporzionali e quindi l'insieme $\{u_1,u_2\}$ è indipendente, dunque l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \to U$ definita da $L(1,0) = u_1$ e $L(0,1) = u_2$ è un isomorfismo e si ha $\dim U = \dim \mathbf{R}^2 = 2$. Una base di U è quindi $\{u_1,u_2\}$.

Ovviamente essendo $W = M_2(\mathbf{R})$ risulta: $(W \cap U) = U$ e $(W+U) = W$.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x+2y+2z,\ x+2y-z, -x+y+4z)$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,

b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

Sol. La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1). Si ha: L(1,0,0) = (1,1,-1); L(0,1,0)) = (2,2,1); L(0,0,1) = (2,-1,4) e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di L sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\,(9-6\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)\,(\lambda-3)^2.$$

Dunque L ha due autovalori distinti : 1 e 3 e si ha $m_a(1) = 1$ e $m_a(3) = 2$.

L'autospazio E(1) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo: $(A-I)\,X = 0$. Si ha :

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ -1 & 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R$$

$\sim_R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi il sistema $((A-I)X = 0$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -x+y+3z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(1) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2z,\ y = -z\}$$

e si ha $m_g(1) = \dim E(1) = 1$. Una base di E(1) è $\{(2,-1,1)\}$.

L'autospazio E(3) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo: (A−3I) X= 0. Si ha :

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema ((A−3I)X = 0 è equivalente al sistema:

$$\{x - y - z = 0$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(3) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = y+z\}.$$

Dunque $m_g(3)$ = dim E(3) = 2 e una base di E(3) è {(1,1,0); (1,0,1)}.

Pertanto l'endomorfismo dato è diagonalizzabile in quanto è definito su uno spazio vettoriale di dimensione 3 e risulta $m_g(1) + m_g(3) = 3$. La matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta L rispetto alla base di autovettori; {(1,1,0); (1,0,1); (2,−1,1)}.

La matrice P tale che $A = P^{-1}DP$ è l'inversa della matrice P^{-1} che rappresenta l'identità rispetto alla base di autovettori B_a = {(1,1,0); (1,0,1); (2,−1,1)} e alla base canonica, dunque le colonne di P^{-1} sono le coordinate degli autovettori di B_a rispetto alla base canonica, ossia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \frac{1}{\det(P)} \, Agg(P^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$