CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
18-01-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola TERRAZZAMENTO. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: TERO, ROZA, MENT.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri $m = 39$ e $n = 603$, determinare :
a) il MCD(39,603) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{603}$ $39x = 12$.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2h+k \\ -3h+2k & -h+k \end{pmatrix} : h,k \in \mathbf{R} \right\}.$$

Determinare:
a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio $(W \cap U)$ e la sua dimensione.
c) il sottospazio $(W+U)$ e la sua dimensione.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x+2y+2z,\ x+2y-z, -x+y+4z)$$

Determinare:
a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.
Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.