CORSO di ALGEBRA (M-Z)
a.a. 2012-13

PROVA SCRITTA
02-07-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti delle lezioni e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola SOTTOSOPRA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: SOT, TOS, SOP.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri $m = 135$ e $n = 210$, determinare :

a) il MCD(135,210) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{210}$: $135x = 75$.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = <\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}>$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} h & k \\ t & u \end{pmatrix} : h+3k-u=0 \right\}.$$

Determinare:

a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio $(W \cap U)$ e una sua base,
c) il sottospazio $(W+U)$ e una sua base.

Si stabilisca infine se la somma $(W+U)$ è diretta.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x-3y+3z,\ 3x-5y+3z,\ 6x-6y+4z)$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.