CORSO di ALGEBRA (M-Z)
a.a. 2012-13

PROVA SCRITTA
02-07-2013

Parte I
ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli “anagrammi” (anche privi di senso) della parola SOTTOSOPRA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: SOT, TOS, SOP.

Soluzione.

Il numero degli “anagrammi” della parola SOTTOSOPRA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{10} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale a $\frac{10!}{3!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:

A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza SOT,

B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza TOS,

C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza SOP,

allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Risulta:

$$|A| = \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!},$$

infatti un elemento di A si ottiene anagrammando la parola (SOT)AOOPRST, dove la sequenza SOT è considerata una lettera, ma gli anagrammi di (SOT)(SOT)AOPR possono essere ottenuti in due modi. Si ha:

$$|B| = \frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!},\ |C| = \frac{8!}{2!2!},\ |A\cap B| = 3(6!)-4!,\ |B\cap C| = 2(6!) -4!,\ |A\cap C| = 6!.$$

Infatti ad esempio l’insieme $(A\cap B)$ è costituito dall’insieme X delle parole ottenute permutando le lettere (SOT),(TOS), A,O,P,R; dall’insieme Y delle parole ottenute permutando le lettere (SOTOS),A,O,P,R,T e dall’insieme Z ottenuto permutando le lettere (TOSOT) A,O,P,R,S; inoltre risulta $(Y\cap Z) \neq\emptyset$ essendo l’insieme delle parole ottenute permutando (TOSOTOS),A,P,R. Infine $(A\cap B\cap C)$ è l’insieme delle parole ottenute permutando tre insiemi di lettere:

1. (SOTOSOP),A,RT;
2. (TOSOT),(SOP),A,R;
3. (TOSOP),(SOT),A,R;

pertanto $(A\cap B\cap C)$ è l’unione di tre insiemi a due a due disgiunti e dunque:

$$|A\cap B\cap C| = 3(4!)$$

Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C| = 2\left(\frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!}\right) + \frac{8!}{2!2!} - 6(6!)+5(4!)$$

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri $m = 135$ e $n = 210$, determinare :

a) il MCD(135,210) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{210}$: $135x = 75$.

Soluzione.

Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 210 e 135 è il seguente:

$210 = 135 + \underline{75}$, $\quad \underline{75} = 210 - 135(1)$,
$135 = 75(1) + \underline{60}$, $\quad \underline{60} = 135 - 75(1)$
$75 = 60(1) + \underline{15}$ $\quad \underline{15} = 75 - 60$
$60 = 15(4)$

Dunque si ha: MCD(210,135) = 15 e l'identità richiesta è: $15 = 210(2)+135(-9)$.

L'equazione in $\mathbf{Z}_{210}$: $135x = 75$ è compatibile poiché 15 divide 75. Per calcolare le soluzioni dell'equazione $135x = 75$ in $\mathbf{Z}_{210}$, si divide per 15, ottenendo l'equazione: $9x = 5$ in $\mathbf{Z}_{14}$. Quest'ultima equazione ha una sola soluzione in $\mathbf{Z}_{14}$. Infatti, essendo MCD(14,9) = 1, si ha: $x = [9]^{-1}[5]$. Quindi occorre calcolare l'inverso di 9 in $\mathbf{Z}_{14}$. A tale scopo si consideri l'identità di Bézout relativa a 14 e 9 : $1 = 14(2)+9(-3)$. Passando in $\mathbf{Z}_{14}$ si ottiene:

$$[1] = [14]\,[2] + [9]\,[-3] = 0+[9]\,[-3] = [9]\,[11].$$

Segue che $9 \cdot 11 \equiv 1 \ (\mathit{mod}\ 14)$ e pertanto $x = [9]^{-1}[5] = [11]\,[5] = [55] = [13]$

Quindi l'equazione in $\mathbf{Z}_{210}$: $135x = 75$ ha 15 soluzioni che sono le 15 classi di congruenza (mod 210) in cui si ripartisce la classe $[13]_{14}$, ossia:

$[13]_{14} = \bigcup_{d=0,\dots 14}[13 + d\frac{210}{15}]_{210}$

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} >$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} h & k \\ t & u \end{pmatrix} : h+3k-u = 0 \right\}.$$

Determinare:

a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio $(W \cap U)$ e una sua base,
c) il sottospazio $(W+U)$ e una sua base.

Si stabilisca infine se la somma $(W+U)$ è diretta.

Soluzione.

La base canonica di $M_2(\mathbf{R})$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia A la matrice avente per righe le coordinate rispetto alla base canonica dei vettori che generano W, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui r(A) = 2 = dim W. Pertanto una base di W è $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Il sottospazio U è isomorfo a $\mathbf{R}^3$, infatti l'applicazione $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow U$ definita da:

$$\varphi(h,k,t) = \begin{pmatrix} h & k \\ t & h+3k \end{pmatrix},$$

è un isomorfismo. Quindi una base di U è: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Sia C la matrice avente per righe le coordinate rispetto alla base canonica dei vettori che generano W+U, ossia:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché r(C) = 4 = dim(W+U), risulta (W+U) = $M_2(\mathbf{R})$ e quindi:

$$\dim(W\cap U) = \dim U + \dim W - \dim(W+U) = 3+2-4 = 1.$$

Pertanto una base di (W∩U) è l'insieme $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x-3y+3z,\ 3x-5y+3z,\ 6x-6y+4z)$$

Determinare:
a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.
Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.
Soluzione.
La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica ha per colonne le coordinate, rispetto a tale base, dei vettori L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1). Si ha:
L(1,0,0) = (1,3,6); L(0,1,0)) = (-3,-5,-6); L(0,0,1) = (3,3,4) e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di L sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)\,(\lambda+2)^2$$

Dunque L ha due autovalori distinti : 4 e −2 e si ha $m_a(4) = 1$ e $m_a(-2) = 2$.
L'autospazio E(4) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

(A−4I) X= 0. Si ha :

$$(A-4I) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \sim_R \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema ((A−4I)X = 0 è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ \quad -2y + z = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(4) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = y,\ 2y = z\}$$

e si ha: $m_g(4) = \dim E(4) = 1$. Una base di E(4) è {(1,1,2)}.

L'autospazio E(−2) è costituito dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo: (A+2I) X= 0. Si ha:

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim_R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema ((A+2I)X = 0 è equivalente al sistema:

$$\{x - y + z = 0$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da:

$$E(-2) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = y - z\}.$$

Dunque $m_g(-2) = \dim E(-2) = 2$ e una base di E(−2) è {(1,1,0); (−1,0,1)}.

Pertanto l'endomorfismo dato è diagonalizzabile in quanto è definito su uno spazio vettoriale di dimensione 3 e risulta: $m_g(4) + m_g(-2) = 3$. La matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rappresenta L rispetto alla base di autovettori: {(1,1,2); (1,1,0); (−1,0,1)}.

La matrice P tale che $A = P^{-1}DP$ è l'inversa della matrice P^{-1} che rappresenta l'identità rispetto alla base di autovettori B_a ={(1,1,2); (1,1,0); (−1,0,1)} e alla base canonica, dunque le colonne di P^{-1} sono le coordinate degli autovettori di B_a rispetto alla base canonica, ossia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \frac{1}{\det(P)}\ \mathrm{Agg}(P^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$