CORSO di ALGEBRA (M-Z)
2012-13

ESONERO
12-11-2012
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola PASSEGGIATA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: TAS, ASI, PAS.

Sol.

Il numero degli "anagrammi" della parola PASSEGGIATA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{11} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{11!}{2!2!3!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi di ogni classe. Indicati con:

A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza TAS,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ASI,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza PAS,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione e quindi:
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$.
Risulta:
$|A| = \frac{9!}{2!2!}$, $|B| = \frac{9!}{2!2!}$, $|C| = \frac{9!}{2!2!}$, $|A\cap B| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!2!}$, $|A\cap C| = \frac{7!}{2!}$, $|B\cap C| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!2!}$,
$|A\cap B\cap C| = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!}$.
Ad esempio, l'insieme $(A\cap B\cap C)$ è uguale all'unione $(H \cup J)$ dove H è costituito delle parole ottenute anagrammando (TAS)(PASI)AEGG e J è l'insieme delle parole ottenute anagrammando (TASI)(PAS) AEGG, tali insiemi hanno intersezione vuota. Pertanto, ancora per il principio di inclusione-esclusione, si ha:

$$|A\cap B\cap C| = |H \cup J| = |H| + |J| = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!}.$$

ESERCIZIO 2. Dati i numeri $m = 1925$ e $n = 1764$, determinare:
a) il MCD(1925,1764) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) l'insieme delle soluzioni intere dell'equazione diofantea:

$$1925x+1764y = 84.$$

Sol.

a) Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 1925 e 1764 è il seguente:

$1925 = 1764(1)+\underline{161}$ $\Rightarrow 161 = 1925 – 1764$,
$1764 = 161\ (10) + \underline{154}$ $\Rightarrow 154 = 1764 – \underline{161}(10)$,
$161 = 154\ (1) + \underline{7}$ $\Rightarrow 7 = \underline{161} – \underline{154}$,
$154 = 7(22)$.
Quindi MCD(1925, 1764) = 7.
b) Si ha:
7 = 161 –154 = 161 – [1764 – 161(10)] = 161(11) – 1764= [1925 –1764](11)−1764= = 1925(11) – 1764 (12) . Dunque un'identità di Bèzout è: 7 = 1925(11) + 1764(–12).
c) L'equazione diofantea 1925x+1724y = 84 ha soluzioni intere in quanto 7 = MCD(1925, 1764) divide 84.
Dall'identità : 7 = 1925(11) + 1764(–12) moltiplicando per 12 si ottiene:

$$84 =1925(132) + 1764(–144),$$

pertanto la coppia (132,–144) è una soluzione dell'equazione diofantea assegnata e quindi l'insieme delle soluzioni intere è: $\{(132 – 1764k, – 144+1925k): k\in \mathbf{Z}\}$.

ESERCIZIO 3. Nel gruppo S_7 determinare la permutazione x tale che:

$$a^2xb = bcacb$$

essendo:

$$a = 2317645,\ b = (152)\ (235),\ c = (57),$$

determinare inoltre la scomposizione in cicli di x, la sua parità e l'ordine.
Sol.
Moltiplicando l'identità data a destra per b^{-1} e a sinistra per a^{-2} risulta: $x = a^{-2}bcac$.
La permutazione a^{-2} è la permutazione rappresentata dal punto di vista della distribuzione da 2315476, la permutazione b è la composizione del 3-ciclo (152) e del 3-ciclo (235) e pertanto b = 5324167. Quindi x = 1342657 = (234) (56). L'ordine di x è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli dunque o(x) = 6. La parità di una permutazione è uguale alla parità di $n = \sum_{i=1}^{t}(k_i - 1)$, dove t è il numero dei cicli della permutazione e k_i è la lunghezza del ciclo i-esimo, pertanto x è una permutazione dispari.

ESERCIZIO 4. Determinare le soluzioni dell'equazione congruenziale:

$$8x \equiv 6 \bmod 770.$$

Esprimere l'insieme di tali soluzioni come unione di classi resto modulo 770, scegliendo per ogni classe un rappresentante tra 0 e 769.
Sol.
Poiché il MCD(8,770) = 2 divide 6, l'equazione [8] x = [6] è compatibile in $\mathbf{Z}_{770}$. Le soluzioni sono le classi di equivalenza mod 770 in cui si ripartisce la classe di equivalenza $[s]_{385}$ unica soluzione dell'equazione $[4]_{385}$ x= $[3]_{385}$. Dunque si ha:
$x = [s]_{385}=([4]_{385})^{-1}[3]_{385}$. Risulta : 1 = 4(-96)+ 385(1), da cui $[4]_{385}^{-1}= [-96]_{385} = [289]_{385}$. Pertanto $x = ([4]_{385})^{-1}[3]_{385} = [289]_{385}[3]_{385}= [867]_{385}= [97]_{385}$. Quindi l'insieme richiesto delle soluzioni dell'equazione congrueziale è:

$$[97]_{385} = [97]_{770} \cup [\ 97+\tfrac{770}{2}]_{770}\ .$$