CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
27-01-2012

SOLUZIONI

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola ITALIANI. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: ALI, LIA,ITI.

Sol. Il numero degli "anagrammi" della parola ITALIANI è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_8 definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe, ossia $\frac{8!}{2!3!}$. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ALI,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza LIA,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ITI,
il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$ che si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Essendo:
$|A| = |B| = |C| = \frac{6!}{2!}$, $|A\cap B| = \frac{5!}{2!}$, $|A\cap C| = 4!+4!$, $|B\cap C| = 4!$, $|A\cap B\cap C| = 3!$
Risulta:
$|A\cup B\cup C| = 3\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} - 3\cdot 4! + 3!$.

ESERCIZIO 1.2. In $\mathbf{Z}_{275}$

i. Determinare le soluzioni dell'equazione [15] x = [50],
ii. Descrivere il gruppo degli elementi invertibili e determinare la sua cardinalità,
iii. Descrivere il sottogruppo generato da [35] e determinare la sua cardinalità.

Sol. Poiché il MCD(15,275) = 5 divide 50, l'equazione [15] x = [50] è compatibile. Le soluzioni sono le classi di equivalenza mod 275 in cui si ripartisce la classe di equivalenza $[s]_{55}$ unica soluzione dell'equazione $[3]_{55}$ x= $[10]_{55}$. Dunque si ha:
$x = [s]_{55}=[3]_{55}^{-1}[10]_{55}$. Risulta : 1 = 3(-18)+ 55(1), da cui $[3]_{55}^{-1}= [-18]_{55} = [37]_{55}$. Pertanto $x = [3]_{55}^{-1}[10] = [37]_{55}[10]_{55}= [370]_{55}= [40]_{55}$. Quindi le soluzioni dell'equazione data sono :$[40]_{275}$, $[40 +\frac{275}{5}]_{275}$, , $[40 + 2\frac{275}{5}]_{275}$, , $[40 + 3\frac{275}{5}]_{275}$,

$[40 + 4\frac{275}{5}]_{275}$.

Il sottogruppo di ($\mathbf{Z}_{275}$,+) generato da [35] è:

<[35]> = {[35]t ∈ $\mathbf{Z}_{275}$: t = 0,1,…,o([35])}, dove o([35]) è l'ordine di [35]. Dunque la cardinalità del sottogruppo generato da [35] è:

$$o([35]) = \frac{275}{MCD(275,35)} = 55.$$

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$. Sia

$$W = \{(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : a+c = 0 \text{ e } b = a+2d\}.$$

i. Dimostrare che W è un sottospazio.
ii. Determinare una base di W e quindi la sua dimensione.
iii. Determinare un sottospazio U tale che W+U = $\mathbf{R}^4$ e W∩U ={$\underline{0}$}.
iv. Il suddetto sottospazio U è unico?

Sol. W è un sottogruppo, infatti se (a,b,c,d) e (e,f,g,h) sono in W si ha:
(a,b,c,d)-(e,f,g,h) = (a-e,b-f,c-g,d-h) ∈ W poichè (a-e) + (c-g) =(a+c)-(e+g) = 0 e (b-f)=(a+2d)-(e+2h) = (a-e) +2(d-h); Inoltre W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari, infatti:
se r ∈ **R**, r(a,b,c,d) = (ra,rb,rc,rd) ∈ W poiché (ra +rc) = 0 e rb = ra + 2rd. Dunque W è un sottospazio.
La dimensione di W è 2 in quanto W è isomorfo a $\mathbf{R}^2$: un isomorfismo L: $\mathbf{R}^2 \rightarrow W$ è definito da: L(a,d) = (a,a+2d,-a,d). Pertanto l'insieme ordinato:

$$B = \{(1,1,-1,0); (0,2,0,1)\}$$

è una base di W perché immagine della base canonica di $\mathbf{R}^2$.
Per determinare un sottospazio U avente somma diretta con W basta estendere B ad una base di $\mathbf{R}^4$, ad esempio aggiungendo a B i vettori (0,0,1,0) e (0,0,0,1). L'insieme ottenuto è una base poiché i 4 vettori costituiscono le righe di una matrice a scala. Pertanto U = <(0,0,1,0);(0,0,0,1)>. Un altro sottospazio avente somma diretta con W è ad es. <(1,3,-1,0,);(0,0,1,0)>. Infatti la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 4.

ESERCIZIO 2.2. Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado ≤ 2. Sia L l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

i. Determinare l'immagine $L(1-x^2)$ del polinomio $(1-x^2)$.
ii. Determinare il nucleo e l'immagine di L.
iii. Verificare che L è diagonalizzabile.
iv. Determinare una base B e una matrice diagonale D tali che D sia la matrice che rappresenta L rispetto a B.

Sol. Le coordinate del vettore $(1-x^2)$ rispetto alla base canonica sono $(1,0,-1)$, quindi le coordinate di $L(1-x^2)$ sono date da:

$$A\,X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da cui $L(1-x^2) = -2x-4x^2$.

Le coordinate dei vettori del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$ il quale, essendo A una matrice di rango 4, ammette solo la soluzione nulla. Poiché $\dim \mathrm{Ker}L + \dim \mathrm{Im}L = \dim \mathbf{R}_2[x] = 4$, si ha $\dim \mathrm{Im}L = 4$, ossia $\mathrm{Im}L = \mathbf{R}_2[x]$. Pertanto L è un automorfismo.

Gli autovalori di L sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A-\lambda I)$, quindi: $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$ per $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$. Si ha: $m_a(2) = 2$ e $m_a(8) = 1$. Per determinare autospazio V(2) relativo all'autovalore 2, occorre risolvere il sistema:

$$\det(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Tale sistema, poiché la matrice dei coefficienti ha rango 1, ammette ∞^2 date da:
$h(-2,1,0) + k(-3,0,1)$, al variare di $(h,k) \in \mathbf{R}^2$, pertanto $V(2) = \langle (-2+x),(-3+x^2) \rangle$.
Per determinare autospazio V(8) relativo all'autovalore 8, occorre risolvere il sistema:

$$\det(A-8I) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Tale sistema, poiché la matrice dei coefficienti ha rango 2, ammette ∞^1 date da:
$h(1,1,1)$, al variare di $h \in \mathbf{R}$, pertanto $V(8) = \langle (1+x+x^2) \rangle$. L'endomorfismo L dato risulta dunque diagonalizzabile poiché:

$$m_a(2) = m_g(2),\ m_a(8) = m_g(8) \quad \text{e} \quad m_g(2) + m_g(8) = \dim \mathbf{R}_2[x] = 3,$$

e la matrice diagonale

$$D = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{matrix}$$

rappresenta L rispetto alla base di autovettori B = $\{(-2+x), (-3+x^2), (1+x+x^2)\}$.