CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
17-02-2012
Soluzioni

Parte I
ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli “anagrammi” (anche privi di senso) della parola CASSAPANCA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: CAS, SAP, ANCA.

Sol. Il numero degli “anagrammi” della parola CASSAPANCA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{10} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{10!}{2!2!4!}$ ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza CAS,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza SAP,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ANCA,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, numero che si calcola con il principio di inclusione-esclusione. Risulta:
$|A| = \frac{8!}{3!} - \binom{6}{2}\frac{4!}{2!}$, $|B| = \frac{8!}{2!3!}$, $|C| = \frac{7!}{2!2!}$, $|A\cap B| = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!}$, $|A\cap C| = 5! + \frac{6!}{2!} - 4!$, $|B\cap C| = 5!$.
L’insieme $A\cap B$ è costituito dall’insieme H delle parole ottenute permutando CAS, SAP, A, A, C, N e dall’insieme J delle parole ottenute permutando CASAP, A, A, S, C, N. Un elemento dell’insieme $H\cap J$ si ottiene permutando CAS, CASAP, A,N e dunque si ha:
$|A\cap B| = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!} - 4!$.
Con ragionamenti analoghi si ottiene:
$|A\cap C| = \frac{6!}{2!} + 5! - 4!$
$|B\cap C| = 5!$
Infine:
$|A\cap B\cap C| = 3!+4! - 2! + 4!+3! - 2!$ In quanto $A\cap B\cap C = X\cup Y\cup K\cup Z$, dove:
X è l’insieme delle parole ottenute permutando le sequenze CAS, SAP e ANCA;
Y è l’insieme delle parole ottenute permutando ANCASAP, S, A e C;
K è l’insieme delle parole ottenute permutando ANCAS, SAP, A, C;
Z è l’insieme delle parole ottenute permutando CASAP, ANCA, S.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri m = 200 e n = 62, determinare:
a) il MCD(200,62) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,

c) le soluzioni intere dell'equazione diofantea: $200x+62y = 22$.

Sol.

a) Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 200 e 62 è il seguente:
$200 = 62\,(3)+\underline{14} \Rightarrow 14 = 200 - 62\,(3)$,
$62 = 14\,(4) + \underline{6} \Rightarrow 6 = 62 - 14(4)$,
$14 = 6\,(2) + \underline{2} \Rightarrow 2 = 14 - 6\,(2)$,
$6 = 3(2)$.
Quindi MCD(200,62) = 2.

b) Si ha:

$2 = 14 - 6(2) = 14 - [62 - 14(4)](2) = 14(9) - 62(2) = [200 - 62\,(3)](9) - 62(2) =$
$= 200(9) - 62\,(29)$. Dunque un'identità di Bèzout è : $2 = 200(9) + 62\,(-29)$.

c) L'equazione diofantea $200x+62y = 22$ ha soluzioni intere in quanto 2 = MCD(200,62) divide 22.
Dall'identità $2 = 200(9) + 62\,(-29)$ si ottiene: $22 = 200(99) + 62\,(-319)$, pertanto la coppia $(99,-319)$ è una soluzione dell'equazione diofantea assegnata e l'insieme delle sue soluzioni intere è : $\{(99 - k62, -319+k200): k\in \mathbf{Z}\}$.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$. Sia W(h) il sottospazio generato dai vettori seguenti:

$$(1,0,h,1);\ (1,-1,0,-h);\ (0,1,h,,-1);\ (-1,2,-h,0).$$

Sia $U = \langle(0,2,-1,2);(0,0,1,1)\rangle$.

i. Determinare la dimensione di W(h) al variare del parametro reale h.
ii. Determinare il sottospazio $(W(0)\cap U)$ e la sua dimensione.
iii. Determinare il sottospazio $(W(0)+U)$ e la sua dimensione.

Sol.

Si consideri la matrice le cui righe sono le coordinate dei vettori che generano W(h):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & h & -1 \\ -1 & 2 & -h & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice è equivalente per righe alla matrice A(h):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & h & h+1 \\ 0 & 0 & 2h & 2h+1 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{pmatrix}$$

Per $h=0$, la matrice A(0) ha rango 3 ed essendo W(0) generato dalle righe di A anche la dimensione di W(0) è uguale a 3, analogamente per $h=-2$. Per $h\neq 0,-2$, la matrice

A(h) ha rango 4 e dunque W(h) = $\mathbf{R}^4$.
Una base di W(0) è l'insieme ordinato: {(1,0,0,1); (0,1,0,1); (0,0,0,1)} e quindi risulta W(0) = {(x,y,z,t)∈$\mathbf{R}^4$: z = 0}. D'altra parte

U ={v∈$\mathbf{R}^4$: v= a(0,2,-1,2)+b(0,0,1,1)=(0,2a,-a+b,2a+b), a,b∈ $\mathbf{R}^2$}.

Pertanto i vettori di W(0)∩U sono i vettori (x,y,z,t) di U tali che a = b e dunque W(0)∩U =<(0,2,0,1)>.
Dalla formula:
dim W(0) + dim U = dim (W(0)+U) + dim (W(0)∩U), si ha:
3+2 = dim (W(0)+U) + 1, e quindi si ottiene: dim (W(0)+U) = 4, ossia : (W(0)+U) = $\mathbf{R}^4$.

ESERCIZIO 2.2. Sia $M_2(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Sia L l'endomorfismo di $M_2(\mathbf{R})$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice A seguente:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{matrix}$$

i. Determinare l'immagine $L\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ della matrice $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$.
ii. Determinare il nucleo e l'immagine di L.
iii. Determinare gli autovalori di L e per ogni autovalore il relativo autospazio.
iv. L'endomorfismo L è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

Sol.

Poiché le colonne della matrice A sono le coordinate dei vettori $L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica, si ha:

$$L\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\, L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\, L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\, L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\, L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha rango 4 e quindi l'immagine di L è $M_2(\mathbf{R})$. Pertanto essendo

dim ImL + dim KerL = dim $M_2(\mathbf{R})$,

il nucleo di L è costituito solo dal vettore nullo e quindi L è un automorfismo.
Gli autovalori di L sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & h & -1 \\ -1 & 2 & -h & 0 \end{pmatrix} = (3-\lambda)\,(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3)$$

Dunque gli autovalori di L sono 1, 3, -3, rispettivamente con molteplicità algebrica 2,1,1.

Le coordinate degli autovettori dell'autospazio V(λ) sono le soluzioni del sistema omogeneo (A-λI)X= 0. E' evidente che V(3) = < $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$>. Si ha V(-3) = < $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$> e V(1) = <$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$>.

Pertanto l'endomorfismo non è diagonalizzabile in quanto la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 non è uguale a quella geometrica.