# CORSO di ALGEBRA (M-Z)

## PROVA SCRITTA
## 11-09-2012

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi non di esercizi.

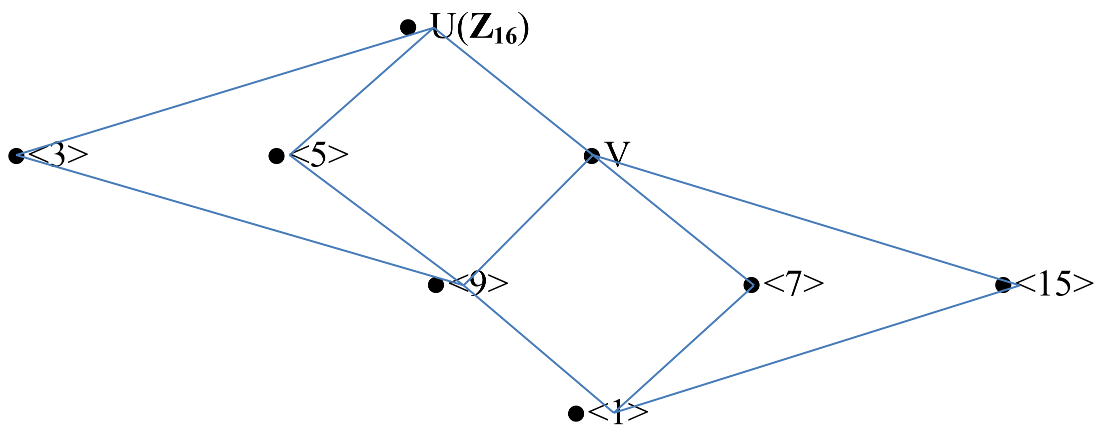
# *Parte I*

**ESERCIZIO 1.1.** Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola "MASSICCIO". Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze MAS, SIC e OSI?

*Sol.* Il numero degli "anagrammi" della parola MASSICCIO è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su $S_9$ definita da: due permutazioni $\sigma$ e $\tau$ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{9!}{2!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi di ogni classe. Indicati con:
A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza MAS,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza SIC,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza OSI,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A \cup B \cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione:
$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
Risulta:
$|A| = \frac{7!}{2!2!}$, $|B| = 7! - \binom{5}{2}3!$, $|C| = \frac{7!}{2!}$, $|A \cap B| = 5!+5!-3!$, $|A \cap C| = \frac{5!}{2!}$, $|B \cap C| = 5!+6! - 4!$,
$|A \cap B \cap C| = 3!+4! - 2!$
Ad esempio, l'insieme $(A \cap B \cap C)$ è costituito dall'insieme H delle parole ottenute permutando MASIC, OSI, C e dall'insieme J delle parole ottenute permutando MAS, OSIC, C, I. L'insieme $H \cap J$ è costituito dalle parole ottenute permutando MASIC, OSIC; pertanto, ancora per il principio di inclusione-esclusione, si ha:
$|A \cap B \cap C| = 3!+4! - 2!$.

**ESERCIZIO 1.2.** Si consideri il gruppo $U(\mathbf{Z}_{16})$ degli elementi invertibili dell'anello $\mathbf{Z}_{16}$. Determinare gli ordini dei suoi elementi e il reticolo dei suoi sottogruppi. Il gruppo moltiplicativo $U(\mathbf{Z}_{24})$ è isomorfo a $U(\mathbf{Z}_{16})$?

*Sol.* Risulta $U(\mathbf{Z}_{16})$ = {[1], [3], [5], [7], [9], [11], [13], [15]}.
Si ha:
o(3) = o(5) = o(11) = o(13) = 4, o(7) = o(9) = o(15) = 2 in $\mathbf{Z}_{16}$.
$U(\mathbf{Z}_{16})$ possiede tre elementi di periodo 2 e quindi tre gruppi ciclici di ordine 2, ossia <7>, <9>, <15>. Inoltre esistono quattro elementi di periodo 4 e $U(\mathbf{Z}_{16})$ possiede due gruppi ciclici di ordine 4 che sono <3> = <11> e <5> = <13>. Si noti che entrambi contengono il sottogruppo ciclico <9>. Infine i tre elementi di periodo 2 generano il gruppo V = {1, 7, 9, 15}, infatti 7 ·9 = 15 e V contiene i tre sottogruppi ciclici di ordine 2. Pertanto il reticolo dei sottogruppi di $U(\mathbf{Z}_{16})$ è il seguente:




Il gruppo moltiplicativo $U(\mathbf{Z}_{24})$ è non è isomorfo a $U(\mathbf{Z}_{16})$ in quanto pur avendo la stessa cardinalità non ha elementi di ordine 4.

# *Parte II*

**ESERCIZIO 2.1.** Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2. Sia L l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = (2a-2c)+(-a+3b-c)x+2cx^2$$

Provare che L è un isomorfismo. Determinare:

i. l'immagine del vettore $(1-x^2)$,
ii. la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
iii. gli autovalori di L e una base per ogni autospazio,

*Sol.* L'endomorfismo dato è un isomorfismo poichè il nucleo è costituito solo dal vettore nullo.
La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori L(1), L(x), $L(x^2)$. Si ha:
$L(1) = 2-x$, $L(x) = 3x$, $L(x^2) = -2-x+2x^2$ e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'immagine del vettore $(1-x^2)$ è data da:
$L(1-x^2) = (2-x) - (-2 - x + 2x^2) = 4 - 2x^2$.
Gli autovalori di L sono: 2,3, in quanto zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^2 (\lambda-3)$$

con $m_a(2) = 2$ e $m_a(3) = 1$. Sia V(2) l'autospazio relativo all'autovalore 2, ossia V(2) è lo spazio costituito dai vettori le cui coordinate, rispetto alla base canonica, sono soluzioni del sistema omogeneo: $(A - 2I) = 0$ che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$V(2) = \langle (1+x) \rangle \qquad e \qquad m_g(2) = 1.$$

Sia V(3) l'autospazio relativo all'autovalore 3, ossia V(3) è lo spazio costituito dai polinomi $a+bx+cx^2$ le cui coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo:
$(A - 3I) = 0$, equivalente al sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$V(3) = \langle (x) \rangle \qquad e \qquad m_g(3) = 1.$$

Pertanto l'endomorfismo non è diagonalizzabile essendo: $m_a(2) = 2 \neq m_g(2) = 1$.

**ESERCIZIO 2.2.** Considerato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$, sia W($h$) il sottospazio generato dal sottoinsieme:
$\{(1,0,1,0);(2,2,-3,h);(2,2,3h^2-3,h^2-h);(2,0,2,h^2-2h)\}$.Determinare:

a) una base e quindi la dimensione di W($h$), al variare del parametro $h$,
b) i sottospazi $(W(0) \cap W(2))$ e $(W(0) + W(2))$.

*Sol.* Si consideri la matrice le cui righe sono le coordinate dei vettori che generano W($h$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & h \\ 2 & 2 & 3h^2-3 & h^2-h \\ 2 & 0 & 2 & h^2-2h \end{pmatrix}$$

Tale matrice è equivalente per righe alla matrice A($h$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & h \\ 0 & 0 & 3h^2 & h^2-2h \\ 0 & 0 & 0 & h^2-2h \end{pmatrix}$$

Per $h$=0, la matrice A(0) ha rango 2 ed essendo W(0) generato dalle righe di A(0)

anche la dimensione di W(0) è uguale a 2. Per $h$=2 la matrice A(2) ha rango 3 e dunque W(2) ha dimensione 3. Per $h \neq 0,2$, la matrice A($h$) ha rango 4 e dunque W($h$) = $\mathbf{R}^4$.
Una base di W(0) è l'insieme ordinato: {(1,0,1,0); (0,2,-5,0)} mentre una base di W(2) è {(1,0,1,0); (0,2,-5,2); (0,0,1,0)}. La matrice seguente, costituita dalle coordinate dei generatori di (W(0) + W(2)),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4 e dunque (W(0)+W(2)) = $\mathbf{R}^4$.
Dalla formula:

$$\dim W(0) + \dim W(2) = \dim (W(0)+W(2)) + \dim (W(0) \cap W(2)),$$

si ha: 3+2 = *dim* (W(0)∩W(2)) + 4 e quindi si ottiene: *dim* (W(0)∩U) = 1, pertanto: (W(0)∩W(2)) = <(1,0,1,0)>.