CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PRIMO ESONERO

(18-11-2011)

SOLUZIONI

Esercizio 1. I membri di una commissione formata da un presidente, un commissario e un segretario devono essere scelti in un gruppo di 10 professori. Quante sono le possibili scelte? La commissione deve esaminare 200 candidati, 15 dei quali il primo giorno. In quanti modi è possibile scegliere i primi 15 candidati?

Soluzione.

Ogni scelta tra 10 professori di un presidente, un commissario e un segretario corrisponde biunivocamente ad una funzione iniettiva da un insieme di 3 elementi in un insieme con 10 elementi, per cui le possibili scelte sono tante quante $|In([3],[10])|= 10(10-1)(10-2)= 720$. I primi 15 candidati da esaminare possono essere scelti in $\binom{200}{15}$ modi perché ogni scelta di 15 candidati corrisponde ad un 15-sottoinsieme dell'insieme di tutti i candidati

Esercizio 2. In $\mathbf{Z}_{77}$ determinare :

a) le soluzioni dell'equazione $[14]\,x= [21]$,

b) il gruppo degli elementi invertibili e la sua cardinalità.

Soluzione.

a)L'equazione in $\mathbf{Z}_{77}$: $[14]x=[21]$ è compatibile poiché il MCD(77,14)=7 divide 21. Pertanto ogni soluzione s di $14x\equiv 21 \bmod 77$ è anche soluzione di $2x\equiv 3 \bmod 11$ e viceversa. L'unica soluzione $[s]_{11}$ di $[2]_{11}x = [3]_{11}$ è data da: $[s]_{11}= ([2]_{11})^{-1}[3]_{11}$. Occorre dunque calcolare $([2]_{11})^{-1}$. Si ha : $1 = 2(-5) + 11(1)$ (identità di Bèzout), da cui $([2]_{11})^{-1}= [-5]_{11}= [6]_{11}$, quindi $[s]_{11}= [6]_{11}\,[3]_{11}= [18]_{11}= [7]_{11}$. La classe di congruenza $[7]_{11}$ è divisa in 7 classi di congruenza modulo 77, ossia:

$[7]_{11} = [7]_{77}\cup[7+ \frac{77}{7}]_{77}\cup[7+2 \frac{77}{7}]_{77}\cup [7+ 3\frac{77}{7}]_{77}\cup [7+4 \frac{77}{7}]_{77}\cup [7+ 5\frac{77}{7}]_{77}\cup [7+6 \frac{77}{7}]_{77}$,

pertanto le soluzioni di $14\,x \equiv 21 \bmod 77$ minori di 77 sono 7,18,29,40,51,62,68.

b) $(\mathbf{Z}_{77},+,\cdot)$ è un anello commutativo unitario con divisori dello zero. Il gruppo $U(\mathbf{Z}_{77})$ degli elementi invertibili è dato da:

$U(\mathbf{Z}_{77}) =\{[a]\in \mathbf{Z}_{77}: MCD(a,77)= 1\}$ ed inoltre $|U(\mathbf{Z}_{77})|= \varphi(77) =77\,(1 - \frac{1}{7})(1- \frac{1}{11}) = 60$,

dove $\varphi: \mathbf{N}^{+}\rightarrow\mathbf{N}^{+}$ è la funzione di Eulero definita da $\varphi(n)$= numero degli interi minori di n e primi con n.

Esercizio 3. Dati i numeri $m = 176$ e $n = 68$, determinare:

a) il MCD(176,68) mediante l'algoritmo di Euclide,

b) una identità di Bézout,

c) le soluzioni intere dell'equazione diofantea: $176x+68y=20$

Soluzione.

a)Lo sviluppo dell'algoritmo di Euclide applicato ai numeri 176 e 68 è il seguente:
$176 = 68 \cdot 2 + \underline{40}$, $\underline{40} = 176 - 68 \cdot 2$
$68 = 40 + \underline{28}$, $\underline{28} = 68 - \underline{40}$
$40 = 28 + \underline{12}$, $\underline{12} = \underline{40} - \underline{28}$
$28 = 12 \cdot 2 + \underline{4}$, $\underline{4} = \underline{28} - \underline{12} \cdot 2$
$12 = 4 \cdot 3 + 0$.
Quindi MCD(176,68) = 4
b) Si ha $4 = \underline{28} - (\underline{40} - \underline{28})2 = \underline{28} \cdot 3 - \underline{40} \cdot 2 = (\underline{68} - \underline{40})\, 3 - \underline{40} \cdot 2 = \underline{68} \cdot 3 - \underline{40} \cdot 5 = 68 \cdot 3 - (176 - 68 \cdot 2)5 = 68 \cdot 13 + 176\,(-5)$. Dunque un identità di Bèzout è $4 = 68\,(13) + 176\,(-5)$.
c) L'equazione diofantea $176x+68y = 20$ ha soluzioni intere in quanto $4 = MCD(176,68)$ divide 20.
Dall'identità $176(-5) + 68(13) = 4$ si ottiene: $176\,(-25) + 68\,(65) = 20$, pertanto la coppia (-25,65) è una soluzione e quindi l'insieme delle soluzioni intere dell'equazione diofantea assegnata è : $\{(-25-k68, 65+k176): k \in \mathbf{Z}\}$.

Esercizio 4. Quanti "anagrammi" anche privi di senso si possono formare dalla parola MATEMATICA? Quanti di questi contengono almeno una delle seguenti sequenze: ATA, ATI e AMA?
Soluzione.
Il numero degli anagrammi della parola MATEMATICA è $\left(\frac{10!}{3!2!2!}\right)$. Posto:
A = insieme degli anagrammi che contengono ATA
B = insieme degli anagrammi che contengono ATI
C = insieme degli anagrammi che contengono AMA
Il numero degli anagrammi che contengono almeno una delle sequenze date è la cardinalità di $A \cup B \cup C$ che si calcola con il principio di inclusione-esclusione.
Poichè:
$|A| = \frac{8!}{2!}$, $|B| = \frac{8!}{2!2!}$, $|C| = \frac{8!}{2!}$, $|A \cap B| = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!}$, $|A \cap C| = 6! + 6!$, $|B \cap C| = 6! + 6!$, $|A \cap B \cap C| = 4!$,
si ha:
$|A \cup B \cup C| = 2\frac{8!}{2!} + \frac{8!}{2!2!} - 2\frac{6!}{2!} - 4\,(6!) + 4!$

Esercizio 5. Verificare se le seguenti applicazioni sono morfismi di gruppi e in tal caso determinarne nucleo e immagine:
5.1. $f : (\mathbf{Q},+) \to (\mathbf{Q},+)$ definita da $f(x) = 2x - 1$
5.2. $f : (\mathbf{Q}^*,\cdot) \to (\mathbf{Q}^*,\cdot)$ definita da $f(x) = x/7$
5.3. $f : (\mathbf{R}^2,+) \to (\mathbf{R}[x],+)$ definita da $f((a,b)) = a + bx^2$
5.4. $f : (\mathbf{Z},+) \to (\mathbf{Z_n},+)$ definita da $f(x) = [x]_n$
5.5. $f : (\mathbf{Z}[x],+) \to (\mathbf{Z_n},+)$ definita da $f(a_0 + \ldots + a_k x^k) = [a_0]_n$
5.6. $f : (\mathbf{R}^3,+) \to (\mathbf{R}^2,+)$ definita da $f((a,b,c) = (a+b,a+c)$
Soluzione.
1. f non è un morfismo, infatti $f(x+y) = 2(x+y)-1 \neq f(x)+f(y) = 2x-1+2y-1 = 2(x+y)-2$
2. f non è un morfismo, infatti $f(xy) = (xy/7) \neq f(x)f(y) = (xy/49)$.

3. f è morfismo infatti $f((a,b)+(c,d)) = (a+c)+(b+d)x^2 = f(a,b)+f(c,d)$,
   $\ker f = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : f(a,b) = 0\} = \{(0,0)\}$ e quindi f è iniettiva,
   $\mathrm{Im} f = \{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \in \mathbf{R}[x] : n \in \mathbf{N}, a_1 = a_i = 0 \text{ per ogni } i>2\}$
4. f è la proiezione canonica sul quoziente: $f(x+y) = [x+y]_n = [x]_n+[y]_n = f(x)+f(y)$, ossia f è un morfismo, $\ker f = n\mathbf{Z}$ e $\mathrm{Im} f = \mathbf{Z}_n$.
5. f è un morfismo infatti $f((a_0+\ldots+a_nx^n)+(b_0+\ldots+b_mx^m)) = [a_0]+[b_0] = [a_0+b_0] = f(a_0+\ldots+a_nx^n)+f(b_0+\ldots+b_mx^m)$, $\ker f = \{ a_0+\ldots+a_nx^n \in \mathbf{Z}[x] : a_0 \in n\mathbf{Z}\}$ e $\mathrm{Im} f = \mathbf{Z}_n$, pertanto il morfismo è suriettivo ma non iniettivo.
6. f è un morfismo, poiché $f((a,b,c)+(i,j,k)) = (a+b+i+j,a+c+i+k) = f((a,b,c))+f((i,j,k))$.
   $\ker f = \{(a,-a,-a) : a \in \mathbf{R}\}$ e
   $\mathrm{Im} f = \mathbf{\{(x,y)} \in \mathbf{R}^2$: esiste $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tale che $x=a+b$, $y=a+c\} = \mathbf{R^2}$ in quanto fissati una coppia (x,y) e $a \in \mathbf{R}$ si ha $f(a,x-a,y-a) = (x,y)$. Quindi f è suriettiva ma non iniettiva.