CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
20-06-2012

SOLUZIONI

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Quanti "anagrammi" anche privi di senso ha la parola CONTENUTO? Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze CON, ONT e NUT?

Sol.

Il numero degli "anagrammi" della parola CONTENUTO è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_9 definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{9!}{2!2!2!}$ ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi in ogni classe. Indicati con:

A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza CON,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ONT,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza NUT,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, numero che si calcola con il principio di inclusione-esclusione:
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.
Risulta:
$|A| = \frac{7!}{2!}$, $|B| = 7!-\binom{5}{2}3!$, $|C| = \frac{7!}{2!}$, $|A\cap B| = 5!+6!-4!$, $|A\cap C| = 5!+5!$, $|B\cap C| = 5!$, $|A\cap B\cap C| = 3!+4!$.

Ad esempio l'insieme B è costituito dalle parole ottenute permutando ONT, O,N,T,E,C,U, dunque 7! A questo numero si deve togliere $\binom{5}{2}3!$, che è il numero delle parole che contengono 2 sequenze ONT. L'insieme $(A\cap B)$ è costituito dall'insieme H delle parole ottenute permutando CON, ONT, E, T, U, e dall'insieme J delle parole ottenute permutando CONT, E, N, O, T, U. Un elemento dell'insieme $(H\cap J)$ si ottiene permutando CONT, ONT, U, E e dunque si ha:
$|A\cap B| = 5! +6! - 4!$.

ESERCIZIO 1.2. Nel gruppo moltiplicativo $U(\mathbf{Z}_{40})$ degli elementi invertibili dell'anello $(\mathbf{Z}_{40} ,+, \cdot)$, sono assegnate le due classi resto [3] e [11].
(i) Scrivere gli elementi dei due sottogruppi ciclici <[3]> e <[11]> .
(ii) Scrivere gli elementi del sottogruppo <[3], [11]> formato dai prodotti (finiti) delle

potenze di [3] ed [11]. Tale sottogruppo è ciclico? Motivare la risposta.
Sol.
L'ordine di [3] in $U(\mathbf{Z}_{40})$ è 4, infatti: $[3]^2 = [9]$, $[3]^3 = [27]$, $[3]^4 = [81] = [1]$. Quindi si ha: <[3]> = {[1], [3], [9], [27]}.
L'ordine di [11] in $U(\mathbf{Z}_{40})$ è 2, infatti: $[11]^2 = [121] = [1]$. Dunque:
<[11]> = {[1], [11]}.
Il sottogruppo generato da [3] e [11] è costituito da tutti i prodotti $[3]^t\,[11]^s$ con $t = 0,1,2,3$ e $s = 0,1$. Pertanto : <[3], [11]> = {[1], [3], [9], [11], [17], [19], [27] [33] }.
Tale sottogruppo non è ciclico in quanto non ha elementi di ordine 8, infatti:
o([3]) = o([17]) = o([27]) = o ([33]) = 4; o([9]) = o([11]) = o([19]) = 2.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri la matrice A:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}$$

Determinare:

i. Determinare gli autovalori di A e per ogni autovalore il relativo autospazio.
ii. La matrice A è diagonalizabile? Motivare la risposta.

Sol.
Gli autovalori di A sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)\,[(2-\lambda)(2+\lambda)]$$

e dunque sono 2 e -2, con $m_a(2) = 2$ e $m_a(-2) = 1$.
Sia V(2) l'autospazio relativo all'autovalore 2, ossia V(2) è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo : $(A-2I) = 0$, equivalente a $y = 0$. Dunque si ha:

$$V(2) = \langle(1,0,0), (0,0,1)\rangle$$

Sia $V(-2)$ l'autospazio relativo all'autovalore -2, ossia $V(-2)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo : $(A+2I) = 0$, equivalente a $4x+y = 0$, $y+2z = 0$. Dunque si ha:

$$V(-2) = \langle (1,-4,2)\rangle$$

Pertanto la matrice A è diagonalizzabile essendo:

$$m_a(2) + m_a(-2) = 3,\ m_a(2) = m_g(2),\ m_a(-2) = m_g(-2).$$

ESERCIZIO 2.2. Siano $\mathbf{R}_2[x]$ e $\mathbf{R}_3[x]$ gli spazi vettoriali dei polinomi rispettivamente di grado ≤ 2 e di grado ≤ 3. Sia L il morfismo da $\mathbf{R}_2[x]$ in $\mathbf{R}_3[x]$ definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = -b+(a+c)x+(a-c)x^2+(b-c)x^3.$$

Determinare:

i. La matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche.
ii. Una base del nucleo e una dell'immagine di L.
iii. La matrice associata ad L rispetto alle basi:
$B = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ e $B' = \{1, x, x+x^2, x^3\}$

Sol.
Risulta : $L(1) = x+x^2$, $L(x) = -1+x^3$, $L(x^3) = x - x^2 - x^3$; dunque la matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e si ha } \quad r(A) = 3.$$

Pertanto una base di *Im* L è $\{x+x^2, -1+x^3, x - x^2 - x^3\}$. Poiché: dim *Im* L = r(A) = 3 e 3 = dim $\mathbf{R}_2[x]$ = dim *Im* L + dim *Ker*L, si ha : *Ker*L = {0} e dunque L è iniettiva.
Infine, tenendo conto che risulta:
$L(1)=x+x^2$, $L(1+x)= -1+x+x^2 = -1+(x+x^2)$, $L(1-x^2) = -1+2x^2+x^3= -1-2(x)+2(x+x^2)+x^3$,
la matrice associata ad L richiesta nell'ultimo quesito è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$