# ALGEBRA

## ESAME CANALE A-L
## 12 NOVEMBRE 2012

C. MALVENUTO

**Istruzioni.**

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

| ESERCIZIO | PUNTEGGIO |
|---|---|
| 1 | / 8 |
| 2 | / 4 |
| 3 | / 4 |
| 4 | / 14 |
| TOTALE | /30 |

| **Nome e Cognome ↓** | **Firma ↓** |
|---|---|
| | |

**Esercizio 1.** (8 punti)

(a) Data la permutazione

$$\alpha = (4,5,6)(3,4,5)(2,3,4)(1,2,3)(7,8,9)(8,9,10)(10,11,12),$$

scrivere $\alpha$ come prodotto dei suoi cicli disgiunti e determinarne l'ordine, la parità e una decomposizione come prodotto di 2-cicli.

(b) Detto $H = <\alpha>$ il sottogruppo ciclico generato da $\alpha$, elencare tutti i suoi sottogruppi. Determinare almeno un generatore per ogni sottogruppo di $H$.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'ordine parziale $\leq$ tra i sottogruppi di $H$, dove per ogni $S, T$ sottogruppo di $H$ si definisce:

$$S \leq T \Leftrightarrow \text{S è sottogruppo di } T.$$

**Esercizio 2.** (4 punti) Dati i numeri $m = 426$ ed $n = 294$:

(a) trovare $(m, n)$, il massimo comune divisore tra $m$ ed $n$, mediante l'algoritmo di Euclide;

(b) Scrivere un'identità di Bézout per $(m, n)$;

**Esercizio 3.** (4 punti)

Sia

$$V = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = 0, 0 \leq k \leq n\}$$

lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali a una indeterminata in cui tutti coefficienti dei termini di grado dispari sono nulli. Ad esempio, $2 + t^2 - 5t^8 - 12t^{20} \in V$, $2 + 3t - 5t^3 + t^4 \notin V$. Stabilire se $V$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$ oppure no.

**Esercizio 4.** (14 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_3$ lo spazio dei vettori-colonna a coefficienti reali , sia definito $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $V$ tramite:

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice $A$ che esprime l'applicazione lineare $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ dello spazio $V$ .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che $f$ è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di $A$ e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per $f$ e la matrice $D$ che esprime $f$ in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare $C$ tale che $D = C^{-1}AC$.

(e) Si calcoli la matrice $C^{-1}$