ALGEBRA

ESAME: SECONDA PARTE
4 FEBBRAIO 2013

C. MALVENUTO - CANALE A-L

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 5
2	/ 5
3	/ 5
4	/ 15
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (5 punti)

Si considerino i polinomi $p_1(x) = 3$, $p_2(x) = 2 + x^3$, $p_3(x) = x - x^2 - 4x^3$, $p_4(x) = -3x + 3x^2 - x^3$ e $p_5(x) = x + 2x^2$. Dall'insieme $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ estrarre, se possibile, una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti reali.

Esercizio 2. (5 punti)

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k-2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & k+3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

calcolare per quali valori del parametro k esiste la matrice inversa A^{-1}.

Esercizio 3. (5 punti)

Verificare Verificare che l'insieme

$$V = \{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \}$$

è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali.

Esercizio 4. (15 punti)

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si dimostri (motivando la risposta) che A è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di A e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(b) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per la trasformazione lineare $T(A) : X \mapsto AX$ di $\mathbb{R}^3$ associata ad A, e la matrice D che esprime $T(A)$ in questa base.

(c) Si determini una matrice non singolare C tale che $D = C^{-1}AC$.

(d) Si calcoli la matrice C^{-1}