ALGEBRA
CANALE A-L

ESAME SECONDA PARTE

SECONDO ESONERO

27 GENNAIO 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 3
2	/ 7
3	/ 6
4	/ 14
5	/ 3
TOTALE	/33

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (3 punti)

Nel gruppo $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ si verifichi che il sottoinsieme $H = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$ è un sottogruppo e si scriva la partizione in classi laterali determinata da H.

Esercizio 2. (7 punti) Siano date le seguenti permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva ognuna di esse come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni.

(b) Si determinino per entrambe l'ordine, l'inversa, e la classe (pari o dispari).

(c) Calcolare i due prodotti $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$.

(d) Stabilire se esistono nel gruppo simmetrico S_8 permutazioni di ordine 10. In caso affermativo esibirne una.

(e) (Facoltativo: bonus). Le permutazioni σ e τ sono tra loro coniugate? E le permutazioni $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono tra loro coniugate?

Esercizio 3. (6 punti) Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime f rispetto alla base canonica, assunta come base di partenza e d'arrivo dell'endomorfismo.

(b) Si provi che f è un isomorfismo (con un metodo a scelta).

(c) Si determini l'isomorfismo inverso f^{-1}.

(d) Si calcoli $f^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix})$

Esercizio 4. (14 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi in una indeterminata t a coefficienti reali di grado al più 2, sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di V definito ponendo:

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (-a_0 - a_1) + (2a_o + 2a_1)t + (-2a_0 - a_1 + a_2)t^2.$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime l'applicazione lineare f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ dello spazio V .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che f è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di A e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B} = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ di autovettori per f e la matrice D che esprime f in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare C tale che $D = C^{-1}AC$.

Esercizio 5. (3 punti)

Sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettorariale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Stabilire se il sottoinsieme W di V definito da

$$W = \{A \in V : a_{11}a_{22} = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V oppure no.