# ALGEBRA
CANALE A-L

ESAME
11 SETTEMBRE 2012

C. MALVENUTO

**Istruzioni.**

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

| ESERCIZIO | PUNTEGGIO |
|---|---|
| 1 | / 6 |
| 2 | / 6 |
| 3 | / 4 |
| 4 | / 10 |
| 5 | / 4 |
| TOTALE | /30 |

| **Nome e Cognome** ↓ | **Firma** ↓ |
|---|---|
| | |

**Esercizio 1.** (6 punti)

Discutere la compatibilità e trovare eventuali soluzioni della seguente equazione diofantea:

$$62 = 68x + 12y.$$

**Esercizio 2.** (6 punti) Nel gruppo ciclico $C_{15} =< x|\ x^{15} = 1 >$ determinare il periodo dell'elemento $x^{320}$. Indicare tutti i generatori del sottogruppo $H =< x^{320} >$.

Si determini la partizione in classi laterali destre di $H$ in $G$.

**Esercizio 3.** (4 punti)

Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali, e sia $T$ il sottoinsieme di vettori di $V$ dato da

$$T = \{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

Si dica (motivando le risposte) se i vettori dell'insieme $T$ sono:

- linearmente indipendenti;
- generatori di $V$;
- una base di V.

**Esercizio 4.** (10 punti)

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Calcolare gli autovalori di $A$ e la relativa molteplicità algebrica.
- Costruire gli autospazi relativi agli autovalori trovati determinandone la molteplicità geometrica, e una base di autovettori per gli autospazi.
- Dire se la matrice è diagonalizzabile e perché, esibendo eventualmente la forma diagonale.

**Esercizio 5.** (4 punti)

Sia data la stessa matrice matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

del precedente esercizio. Calcolare il determinante di $A$ e, se esiste, la matrice inversa $A^{-1}$.