ALGEBRA
CANALE A-L

APPELLO ESTIVO
20 GIUGNO 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 3
2	/ 6
3	/ 4
4	/ 6
5	/ 14
TOTALE	/33

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (3 punti) Si determini tramite l'algoritmo di Euclide il massimo comune divisore d tra 444 e 201. Scriva poi d come combinazione lineare di 444 e 201 (identità di Bézout). Si dica infine se la classe di 201 in $\mathbb{Z}_{444}$ ammette un inverso moltiplicativo e, nel caso, determinarlo.

Esercizio 2. (6 punti) Studiare il gruppo $(U_{12}, \cdot)$ degli elementi invertibili (rispetto al prodotto di classi) di $\mathbb{Z}_{12}$, l'insieme delle classi resto modulo 12. Scrivere esplicitamente tutti i suoi sottogruppi, l'inverso e l'ordine dei suoi elementi.

Esercizio 3. (4 punti)

Determinare un elemento x nel gruppo simmetrico S_8 tale che

$$cxb = cba$$

ove $a = (1,3,5)(4,5,6)(2,4,8)$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $c = (2,8,3,7)$

Determinare una decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità di x.

Esercizio 4. (6 punti)

Sia V il sottoinsieme delle matrici 3×3 a coefficienti reali definito da:

$$V := \{A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) | a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0\}.$$

Ad esempio, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in V$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3.12 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin V$.

Stabilire se V:

- è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$;
- è un sottoanello di $M_3(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. (14 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_3$ lo spazio dei vettori-colonna a coefficienti reali , sia definito $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di V tramite:

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ 5x_2 + 6x_3 \\ -3x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime l'applicazione lineare f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ dello spazio V .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che f è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di A e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per f e la matrice D che esprime f in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare C tale che $D = C^{-1}AC$.

(e) Si calcoli la matrice C^{-1}