

ALGEBRA
CANALE A-L

APPELLO STRAORDINARIO
13 APRILE 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 5
2	/ 5
3	/ 5
4	/ 5
5	/ 10
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (5 punti)

Si determini tramite l'algoritmo di Euclide il massimo comune divisore d tra 372 e 249. Scriva poi d come combinazione lineare di 372 e 249 (identità di Bézout). Si dica infine se la classe di 249 in $\mathbb{Z}_{372}$ ammette un inverso moltiplicativo e, nel caso, determinarlo.

Esercizio 2. (5 punti)

Sia $(\mathbb{Z}_8, +)$ il gruppo additivo delle classi resto modulo 8. Scrivere esplicitamente tutti i suoi sottogruppi e il diagramma di Hasse della relazione d'ordine di inclusione tra i sottogruppi. Descrivere infine i laterali destri di H in G , dove $H = \langle \bar{2} \rangle$.

Esercizio 3. (5 punti)

Determinare un elemento x nel gruppo simmetrico S_8 tale che

$$axb = acba$$

ove $a = (1, 3, 2)(2, 4, 3)(4, 8, 5)$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $c = (2, 8)$

- (a) Determinare una decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità di x .
- (b) Determinare x^{14} e trovarne l'ordine.

Esercizio 4. (5 punti)

Nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si consideri il sottoinsieme Σ formato dai numeri che possono essere scritti nella forma $\frac{3t}{2^k}$, con $t \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$. Verificare che Σ è un sottoanello di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Dire se esso è un anello commutativo unitario (motivando la risposta).

Esercizio 5. (10 punti)

Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Sia

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

la base canonica di M_2 .

Sia fissata la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2$ e sia $T : M_2 \rightarrow M_2$ l'applicazione definita da

$$T(A) = AB - BA, \forall A \in M_2.$$

- (a) Verificare che T soddisfa le proprietà degli operatori lineari.
- (b) Calcolare la matrice di T nella base $\mathcal{E}$.
- (c) Stabilire se B è un autovettore di T .
- (d) Calcolare gli autovalori di T .
- (e) Stabilire se T è o meno iniettivo, e dare la dimensione del nucleo $\text{Ker}(T)$ di T .