# ALGEBRA
CANALE A-L

ESAME SECONDA PARTE
SECONDO ESONERO
17 FEBBRAIO 2012

C. MALVENUTO

**Istruzioni.**

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

| ESERCIZIO | PUNTEGGIO |
|---|---|
| 1 | / 3 |
| 2 | / 6 |
| 3 | / 3 |
| 4 | / 6 |
| 5 | / 14 |
| TOTALE | /32 |

| **Nome e Cognome** ↓ | **Firma** ↓ |
|---|---|
| | |

**Esercizio 1.** (3 punti) Sia $G$ il gruppo ciclico di ordine $10$ generato da $x$:

$$G = \{x^k | k \in \mathbb{Z}, x^{10} = id\}.$$

Scrivere esplicitamente i laterali destri di $H$ in $G$, con $H =< x^2 >$.

**Esercizio 2.** (6 punti)

Determinare un elemento $x$ nel gruppo simmetrico $S_8$ tale che

$$axa = acbab$$

ove $a = (1,2,3)(2,3,4)(4,5,6)$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $c = (2,8)$

(a) Determinare una decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità di $x$.

(b) Determinare $x^{2012}$ e trovarne l'ordine.

**Esercizio 3.** (3 punti)

Sia
$$V = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_{2k} = 0\}$$
lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali a una indeterminata in cui tutti coefficienti dei termini di grado pari sono nulli. Ad esempio, $t + 5t^7 - 2t^{21} \in V$, $2 + 3t - 5t^3 + t^4 \notin V$. Stabilire se $V$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$ oppure no.

**Esercizio 4.** (6 punti)

Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi in una indeterminata $t$ a coefficienti reali di grado al più 2, e $W$ lo spazio delle matrici reali simmetriche $2 \times 2$. Sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare di $V$ in $W$ definita ponendo:

$$f(a + bt + ct^2) = \begin{bmatrix} a & a+b+c \\ a+b+c & a \end{bmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice $A$ che esprime l'applicazione lineare $f$ rispetto alla basi canoniche di $V$ e $W$.

(b) Determinare basi per $Ker f$ e $Im f$.

(c) (Facoltativo. 3 punti) Calcolare $f^{-1}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$.

**Esercizio 5.** (14 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_3$ lo spazio dei vettori-colonna a coefficienti reali , sia definito $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $V$ tramite:

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ -4x_1 - x_2 - 8x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice $A$ che esprime l'applicazione lineare $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ dello spazio $V$ .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che $f$ è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di $A$ e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per $f$ e la matrice $D$ che esprime $f$ in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare $C$ tale che $D = C^{-1}AC$.

(e) Si calcoli la matrice $C^{-1}$