

ALGEBRA
CANALE A-L

ESAME PRIMA PARTE
17 FEBBRAIO 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 6
2	/ 6
3	/ 6
4	/ 12
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	Firma ↓

Esercizio 1. (6 punti)

Determinare, se esiste, l'inverso moltiplicativo di 132 modulo 811.

Esercizio 2. (6 punti) Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo e $x \in G$. Provare che il sottoinsieme di G

$$xHx^{-1} = \{y \in G \mid y = xhx^{-1}, h \in H\}$$

è un sottogruppo di G .

Esercizio 3. (6 punti) Sia $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ l'insieme dei numeri complessi, gruppo abeliano rispetto alla consueta operazione di somma di complessi:

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$

Sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} \alpha : (\mathbb{C}, +) &\rightarrow (\mathbb{R}, +) \\ a + ib &\mapsto a \end{aligned}$$

- (a) Verificare che α è un omomorfismo di gruppi.
- (b) Determinarne il nucleo $\text{Ker}(\alpha)$.
- (c) (Facoltativo) Determinare la partizione in classi laterali di $\text{Ker}(\alpha)$ in \mathbb{C} .

Esercizio 4. (12 punti)

Studiare il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{14})$ degli elementi invertibili delle classi resto modulo 14 (tavola moltiplicativa, inversi e ordine degli elementi). Stabilire se è isomorfo a \mathbb{Z}_6 oppure a S_3 , nel qual caso descrivere esplicitamente un isomorfismo.