Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 7

31 ottobre 2011

1. Si studi la struttura dei sottogruppi del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Determinare i sottogruppi del gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

3. Determinare i sottogruppi del gruppo dei movimenti rigidi di un rettangolo (detto anche *gruppo di Klein*).

4. Determinare i sottogruppi del gruppo simmetrico S_3 delle permutazioni su tre elementi.

5. Sia G l'insieme delle matrici reali 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove $ad - bc \neq 0$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto al prodotto matriciale (righe per colonne):
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$
Esibire un sottogruppo finito di G, di ordine 4.

6. Sia G l'insieme delle matrici reali 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dove $ad \neq 0$. Dimostrare che G è un sottogruppo del precedente.

7. Considerato in gruppo D_4 dei movimenti rigidi del quadrato, si trovino tutti i sottogruppi di tale gruppo e, fra di essi, si definisca la relazione d'ordine indotta dall'inclusione.

8. Se H e K sono sottogruppi di G, dimostrare che $H \cap K$ è un sottogruppo di G. (La dimostrazione si applica ugualmente al caso dell'intersezione di un numero qualunque, finito o infinito, di sottogruppi.)