Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 6

8 novembre 2011

Tavole, piume e macchine,
tutto a moltiplicare,
carezza per carezza,
abbraccio per vulcano. [...]
(La voce a te dovuta, Pedro Salinas)

1. Studiare i gruppi di ordine $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a meno di isomorfismo. Qual è il più piccolo gruppo non commutativo? In particolare, provare che se un gruppo ha 3 elementi, allora è abeliano. Ripetere per 4 e 5.

2. Determinare quali dei sistemi qui descritti sono gruppi. In caso negativo, dire quali degli assiomi di gruppo non sono verificati.

   (a) $G = \mathbb{Z}$, con $a \cdot b := a - b$.

   (b) $G = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, con $a \cdot b := ab$, l'usuale prodotto tra interi.

   (c) $G = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, con
   $$a_i \cdot a_j := a_{i+j} \text{ se } i + j < 7$$
   $$a_i \cdot a_j := a_{i+j-7} \text{ se } i + j \geq 7.$$
   (Ad esempio, $a_5 \cdot a_4 := a_2$ in quanto $5 + 5 = 9 > 7$.)

   (d) $G =$ insieme dei razionali con denominatore dispari, $a \cdot b := a + b$ l'usuale somma tra numeri razionali.

3. Dimostrare che se $(G, \cdot)$ è un gruppo abeliano, allora per ogni coppia di elementi $a, b \in G$ e per tutti gli interi n si ha $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

4. Dimostrare che se $(G, \cdot)$ è un gruppo nel quale $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è un gruppo abeliano.

5. In S_3, il gruppo simmetrico si 3 elementi, dare un esempio di due elementi x e y tali che $(x \circ y)^2 \neq x^2 \circ y^2$.

6. Dimostrare che in S_3 vi sono quattro elementi che soddisfano l'equazione $x^2 = e$ e tre elementi che soddisfano l'equazione $x^3 = e$, con e la permutazione identica.

7. Se $(G, \cdot)$ è un gruppo finito, dimostrare che esiste un intero positivo N tale che $a^N = e$ per ogni $a \in G$.

8. Dimostrare che un gruppo nel quale ogni elemento coincide col proprio inverso è abeliano.

9. Dire quali fra i seguenti insiemi numerici, muniti dell'operazione di addizione o moltiplicazione usuali, sono gruppi: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

10. Si verifichi se $(\mathbb{Z}_m, +)$ e $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ sono gruppi, dove $\mathbb{Z}_m$ (anche denotato con $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) è l'insieme delle classi di quivalenza rispetto alla conguenza modulo m, $m \geq 2$, $\mathbb{Z}_m^* = \mathbb{Z}_m \setminus \{\overline{0}\}$, e le operazioni fra classi sono ereditate dalle usuali operazioni su $\mathbb{Z}$: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$ e $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$.

11. Verificare che $(U_m, \cdot)$, dove $U_m = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_m : (a, m) = 1\}$ è un gruppo; studiarne in particolare il caso $m = 8$, scrivendone la tabella moltiplicativa, evidenziando l'ordine di ogni elemento.

12. Costruire le tabelle dei seguenti gruppi: $(\mathbb{Z}_6, +)$, $(U_{12}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$.

13. Determinare il gruppo dei movimenti rigidi di un rettangolo (detto anche *gruppo di Klein*).

14. Verificare che l'insieme S_3 delle permutazioni su tre elementi è un gruppo rispetto al prodotto operatorio, dire se esso è abeliano, determinare il periodo (o ordine) e l'inverso di ogni elemento.

15. Sia G l'insieme delle matrici reali 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove $ad - bc \neq 0$.

    Dimostrare che G è un gruppo rispetto al prodotto matriciale (righe per colonne):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

    È abeliano?

16. Sia G l'insieme delle matrici reali 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dove $ad \neq 0$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto al prodotto matriciale. È abeliano?

17. Sia G l'insieme delle matrici 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove a, b, c, d sono interi modulo 2, e tali che $ad - bc \neq 0$. Dimostrare che G è un gruppo finito di ordine 6 rispetto al prodotto di matrici. È abeliano?

18. Considerato in gruppo D_4 dei movimenti rigidi del quadrato, se ne scrivano gli elementi rappresentandoli come permutazioni dell'insieme dei vertici; indicata poi con ρ la rotazione di $1/2\pi$ e con σ una qualunque delle 4 simmetrie, si rappresentino tutti gli elementi di D_4 tramite ρ e σ.

19. Sia G l'insieme delle applicazioni $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tali che $\forall x \in \mathbb{R} f_{a,b}(x) = ax + b$. Si dimostri che $(G, \circ)$ è un gruppo non abeliano.