Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 4

17 ottobre 2011

How many roads must a man walk down
before you call him a man?
How many seas must a white dove sail
before she sleeps in the sand?
Yes'n' how many times must the cannon balls fly
before they're forever banned?
(Blowin' in the wind, Bob Dylan)

1. Quante sono le applicazioni da $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Quante sono le applicazioni suriettive da $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$?

3. Quanti sono gli anagrammi della parola MAMMA? e della parola PAPA'? e della parola AIUOLE?

4. Quante targhe distinte si possono ottenere usando prima due lettere dell'alfabeto inglese, poi tre cifre tra 0 e 10, seguite da altre due lettere dell'alfabeto inglese?

5. Dimostrare per induzione che
$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$
Dimostrare lo stesso fatto per via combinatoria, contando in due modi i sottoinsiemi di cardinalità 2 di un insieme di cardinalità n.

6. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$
(Sugg.: Applicare il fatto che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.)

7. Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che le somme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

(sottoinsiemi di cardinalità pari) e

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

(sottoinsiemi di cardinalità dispari) sono entrambe uguali a 2^{n-1}.

8. Si dimostrino in modo combinatorio le seguenti identità che involvono i coefficienti binomiali. Si confrontino le dimostrazioni trovate con dimostrazioni algebriche che usino la formula per il binomiale e con dimostrazioni per induzione:

   (a) $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$
   (la riga n–sima del triangolo di Pascal è simmetrica rispetto al centro);

   (b) $\binom{n}{h} = \binom{n-1}{h} + \binom{n-1}{h-1}$
   (relazione ricorsiva del binomiale);

   (c) $2^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}$
   (somma degli elementi della riga n–sima del triangolo di Pascal);

   (d) $\binom{2n}{n} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}^2$
   (somma dei quadrati degli elementi della riga n–sima del triangolo di Pascal. Suggerimento: contare in due modi diversi quanti sono i modi di fare uscire n persone da una sala che contiene n uomini ed n donne);

   (e) $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
   (generalizzazione del punto precedente);

   (f) $(h+1)\binom{n}{h+1} = (n-h)\binom{n}{n-h}$
   (contare in due modi diversi quanti sono i sottografi di K_n isomorfi a una stella ad h punte);

   (g) $(h+1)\binom{n}{h+1} = n\binom{n-1}{h}$
   (contare in due modi diversi quante sono le coppie del tipo (tribù, capotribù) in un insieme di n persone);

(h) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k)$
(suggerimento: contare in due modi diversi il numero totale di coppie non ordinate di un insieme ad n elementi);

(i) $\binom{n}{r} = \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + \ldots + \binom{n-1}{r-1}$;

(j) $\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

9. Dimostrare che il coefficiente di valore più alto nella riga n–sima del coefficiente binomiale è $\binom{n}{k}$ con $k = \lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$.