Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 3

12 ottobre 2011

The brain is wider than the sky,
For, put them side by side,
The one the other will include
With ease, and you beside. [...]
(Emily Dickinson)

1. Dimostrare per induzione la validità delle seguenti uguaglianze:

   (a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (d) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

   (e) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

   (f) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n+1) = (n+1)(2n+1)$

   (g) $2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

   (h) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (2n+1)(n+1)$

   (i) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

   (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

2. Consideriamo la somma dei primi n numeri pari: $2+4+6+\ldots+2n$. Calcolare detta somma per qualche valore di n. Cercare di dedurre una formula di calcolo rapido (analoga a quelle precedenti) ed eventualmente dimostrarla per induzione.

3. Definiamo $a_n := 2^{2^n}+1$; dimostrare che si ha $a_n = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} + 2$.

4. Si dimostri per induzione che si ha

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=0}^{n} 2^i \ (= 1+2+4+\ldots+2^n) = 2^{n+1}-1$$

e che più in generale vale

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

5. Dimostrare per induzione su n che, per ogni $n \geq 1$ si ha:

   (a) $2n \geq n+1$;

   (b) $2^n \geq n+1$;

   (c) La precedente disuguaglianza si generalizza nella seguente, detta disuguaglianza di Bernoulli:

   $$\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad (1+m)^n \geq 1+nm;$$

   (d) $n! > n^2$;

   (e) $3|(n^3-n)$;

   (f) $8|(3^{2n}-1)$;

   (g) se $x, y \in \mathbb{N}$, allora $(x-y)|(x^n-y^n)$.

   (h) $2n^3-3n^2+n+31>0$ (vale anche per qualche $n \leq 1$?).

6. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 7$, si ha $3^n < n!$. Trovare un naturale m per cui si abbia $4^m < m!$ e dimostrare che vale $4^n < n!$ per ogni $n \geq m$.

7. Dimostrare per induzione che, definendo il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(per $0 \leq k \leq n$; ricordate che $0! = 1$), vale la formula del binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

8. Ricordate che i *numeri di Fibonacci* F_k ($k = 1, 2, \ldots$) sono definiti ricorsivamente come segue: $F_1 := 1$, $F_2 := 1$ e, per $k \geq 3$, $F_k := F_{k-1} + F_{k-2}$. Quindi i primi numeri di Fibonacci sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... Dimostrare per induzione le seguenti affermazioni:

    (a) per ogni $n \geq 1$ si ha $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;

    (b) per ogni $n \geq 1$ si ha $\text{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$;

    (c) per ogni $n \geq 1$ si ha $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

9. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come $f(m, 0) = m$ e, per $n \geq 0$, $f(m, n+1) = f(m, n) + 1$.

    (a) Qual è il valore di $f(52, 39)$?

    (b) Quale proprietà si può dimostrare in generale per $f(m, n)$?

10. Principio di Dirichlet, noto anche come **principio dei cassetti**, oppure **pigeonhole principle** (principio delle gabbie dei piccioni).

    Se un insieme finito con n *elementi* (piccioni) *deve essere ripartito in* m *sottoinsiemi* (gabbie) *e se* $n > m \geq 1$*, allora almeno un sottoinsieme contiene più di un elemento.*

    Dimostrare per induzione su n (con $n > m \geq 1$) tale enunciato, all'apparenza del tutto ovvio, ma che rende spesso un utile servizio.

11. Si consideri la seguente affermazione: *Una scatola di matite contiene sempre matite che hanno tutte lo stesso colore.*
    Determinare l'errore logico nella seguente "dimostrazione per induzione":

    Sia n il numero di matite nella scatola. L'affermazione è ovvia per $n = 1$. Sia $n \geq 2$; si supponga, per ipotesi induttiva, che prese comunque $n - 1$ matite dalla scatola, esse abbiano lo stesso colore: vogliamo dimostrare che da ciò segue che l'enunciato è vero per l'insieme $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ delle n matite. Infatti per ipotesi induttiva gli $n - 1$ elementi di $C' = \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ hanno lo stesso colore, così come hanno lo stesso colore gli $n - 1$ elementi di $C'' = \{c_2, \ldots, c_n\}$: quindi gli elementi di $C' \cap C'' = \{c_2, \ldots, c_{n-1}\}$ hanno lo stesso colore tanto degli elementi di C' quanto degli elementi di C'': da questo si conclude facilmente (per confronto) che tutte le matite di C hanno lo stesso colore.

12. Si provi che il numero di regioni nel piano formate da n rette in posizione generica (tali cioè che non ci siano rette parallele e tali che tre rette non si incontrino mai in uno stesso punto) è $n(n+1)/2+1$.

13. Si calcoli il numero di regioni di un piano che si formano intersecando n cerchi in posizione generica (tali cioè che tre cerchi non si intersechino in un punto e due cerchi si intersechino in esattamente due punti).