ALGEBRA

Claudia Malvenuto
Canale A-L

Scheda esercizi n. 2

5 ottobre 2011

I felt a cleaving in my mind
As if my brain had split;
I tried to match it, seam by seam,
But could not make them fit. [...] (Lost thought, Emily Dickinson)

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita come $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Determinare $f^{-1}(9), f^{-1}(-4), f^{-1}(6), f^{-1}(\mathbb{N}), f^{-1}(2\mathbb{N}), f(\{-5, 4, -2, 10\}), f^{-1}(\mathbb{Z})$ e Imf.

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(x) = 6x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Determinare $f^{-1}(15), f^{-1}(30), f(\{-5, 3, 21\}), f^{-1}(\mathbb{Z})$ e Imf. Se si considera l'applicazione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita allo stesso modo, determinare gli analoghi degli insiemi sopra definiti.

3. Studiare l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che ad $x \in \mathbb{Z}$ associa $f(x) = ax + 1$, al variare del parametro $a \in \mathbb{Z}$.

4. Studiare l'applicazione f di $\mathbb{R}$ in $[-1, 1]$ definita da $f(x) = \sin(x)$.

5. Studiare l'applicazione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2 + 2x - 1$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ e descrivere esplicitamente $f^{-1}(0), f^{-1}(6), f^{-1}(14)$. Ripetere l'esercizio per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita allo stesso modo.

6. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è biiettiva ($\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\forall b \in \mathbb{R}$) e determinarne l'inversa.

7. Studiare l'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\alpha(x) = x^2|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

8. Studiare l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, verificare se è biiettiva; in caso affermativo, determinarne l'inversa.

9. Studiare le applicazioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = x$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con $g(x) = |x|$ e descrivere le applicazioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

10. Si dica se le corrispondenze individuate dai seguenti insiemi sono applicazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\}$$
$$\{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\}$$

11. Dire se le seguenti assegnazioni definiscono delle applicazioni:
    (a) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x,y) = x$ se x è pari, $f(x,y) = y$ se x è dispari;
    (b) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x,y) = x$ se x è pari, $f(x,y) = y$ se y è dispari;
    (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n - 5$;
    (d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $f(\frac{p}{q}) = \frac{p+q}{2}$;
    (e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $f(\frac{p}{q}) = 3\frac{p}{q}$;
    (f) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(\frac{p}{q}) = p - q$;
    (g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(n) = 0$ se n è primo, $f(n) = 1$ se n è pari;
    (h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = 3n$ se n è multiplo di 2, $f(n) = -3n$ se n è multiplo di 3;
    (i) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che $f(n) = \{k \in \mathbb{N} : k|n\}$.

12. Sia $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ un'applicazione. Si provi che se $n > m$ allora f non è iniettiva, se $n < m$ allora f non è suriettiva.

13. Stabilire se le seguenti applicazioni sono iniettive e/o suriettive. ($\mathbb{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.)
    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$
    (c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
    (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$
    (Qui si determinino anche l'insieme immagine $f(\mathbb{Z})$, e $f(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.
    (e) $f : \mathbb{N} \to \{m \in \mathbb{N} : m \text{ è pari}\}$, $f(n) = 2n$
    (f) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3 - 2x$;
    (g) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3 - 2x$;
    (h) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $f(x,y) = (3x - y, 3x + y)$;
    (i) $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(x,y) = (3x - y, 3x + y)$;
    (j) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n,m) = (n + 1, m - 5)$;
    (k) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n) = (n + 1, n - 5)$.

14. Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(n) = \begin{cases} 3n & \text{se } n \text{ è pari} \\ n-1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases},$$

determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ e $f(\mathbb{N})$.

15. Data la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da:

$$f(n) = \begin{cases} -3n & \text{se } n \text{ è negativo} \\ n+2 & \text{se } n \text{ è positivo} \end{cases},$$

determinare $f^{-1}(0)$ e dire se f è suriettiva.

16. Data la funzione $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 1 \\ x-y & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

determinare $f(0,-3)$, $f^{-1}(0)$, $f(A)$ dove $A = \{(z,z) : z \in \mathbb{Q}\}$. Dire se esiste un elemento $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ con $b > 0$ tale che $f(a,b) = f(\frac{2}{7},-1)$.

17. Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari}, \end{cases}$$

determinare $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(-5)$, $f^{-1}(\{-5,5\})$. Determinare $f(\mathbb{N})$ e $f(2\mathbb{N})$ (si ricordi che $k\mathbb{N}$ indica l'insieme $\{kn : n \in \mathbb{N}\}$).

18. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$. Calcolare, se esistono, f^{-1}, g^{-1}. Calcolare poi $f \circ g$, $g \circ f$.

19. Dire se le seguenti funzioni sono invertibili e, se sì, determinare l'inversa:

    (a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = (3x-7)/2$;

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;

    (c) $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(x,y) = (x-y, 2x)$;

    (d) $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(x,y) = (x-y, 0)$;

    (e) $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$, $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = b$;

    (f) $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$, $f(1) = c$, $f(2) = c$, $f(3) = b$;

    (g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

    $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

    (h) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}x$.

20. Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ due applicazioni. Si provi che se f e g sono iniettive, allora anche $g \circ f$ lo è. Si provi che se f e g sono suriettive, allora anche $g \circ f$ è suriettiva. Fornire inoltre un esempio in cui $g \circ f$ è iniettiva (oppure suriettiva) anche se f, g non lo sono entrambe (questo dimostra che le implicazioni precedenti non si invertono).

21. Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$. Quante e quali sono le diverse funzioni tra A e B? Dire anche quali tra quelle elencate sono suriettive, e quali iniettive.

22. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quante sono le funzioni $f : A \to B$ tali che $f(a) = 1$? E quante sono quelle tali che $f(b) \neq 2$?

23. Sia $V = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sia $g : V \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = x^2 + 1$. Trovare l'immagine $g(V)$ di g.

24. Trovare l'immagine di ciascuna delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

    (a) $f(x) = x^3$;
    (b) $g(x) = \sin x$;
    (c) $h(x) = x^2 + 1$.

25. Siano f, g e h le funzioni definite da

    (a) $f(x) = x^2$ dove $0 \leq x \leq 1$
    (b) $g(y) = y^2$ dove $2 \leq y \leq 8$
    (c) $h(z) = z^2$ dove $z \in \mathbb{R}$

    Dire se sono diverse oppure no.

26. Una funzione costante può essere iniettiva? E suriettiva?

27. Su quali insiemi A la funzione $id_A : A \to A, x \mapsto x$ è iniettiva? e su quali insiemi è suriettiva?

28. Per una funzione $f : A \to B$ suriettiva, qual è l'immagine $f(A)$?

29. Dato un insieme A e un suo sottoinsieme B, dire se le seguenti applicazioni sono iniettive e/o suriettive:

    (a) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(S) = S \cap B$;
    (b) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(S) = S \cup B$;
    (c) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(S) = S \Delta B$.

    (Notate che si possono avere situazioni diverse a seconda di come è fatto B: se è l'insieme vuoto, se coincide con A,...)

30. Date le applicazioni f e g descrivere, quando è possibile, le applicazioni $f^2 = f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ (g \circ f)$ e $(f \circ g) \circ f$ e determinare quali sono iniettive e/o suriettive.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$; $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 3x - 2$;

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3 - 2x$; $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = 2 - 3x$;

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3 - 2x$; $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = 3x/2$;

(d) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 3x - y$; $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $g(x) = (x, 0)$;

(e) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 3x - y$; $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^2$, $g(x) = (x/2, 0)$.