ALGEBRA

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 1

3 ottobre 2011

È un tempio la Natura, dove a volte parole
escono confuse da viventi pilastri
e che l'uomo attraversa tra foreste di simboli
che gli lanciano occhiate familiari. [1]
(Correspondances, di Charles Baudelaire, in 'Les fleurs du mal')

1. Determinare il grafico della corrispondenza tra $X := \{1, 2, 3, 4\}$ ed $Y := \{1, 3, 5\}$ definita nella seguente maniera:
$$x \text{ “è minore o uguale a” } y.$$
2. Determinare il grafico della corrispondenza tra $X := \{2, 3, 4, 7\}$ ed $Y := \{3, 8, 10\}$ definita nella seguente maniera:
$$x \text{ “divide” } y.$$
3. Dare esplicitamente una formula matematica che determina la corrispondenza tra $X := \{0, 1, 2\}$ ed $Y := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ che ha come grafico $G := \{(2, 0), (0, 2), (0, -2)\}$.
4. Ricordiamo che data una corrispondenza $\chi = (G, X, Y)$ tra X e Y, si può definire la corrispondenza inversa $\chi^{-1} := (G^{-1}, Y, X)$ il cui grafico G^{-1} è così definito:
$$(y, x) \in G^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in G.$$
Determinare il grafico della corrispondenza inversa di ciascuna delle corrispondenze definite negli esercizi 2., 3. e 4.

[1] La Nature est un temple où de vivants piliers/ laissent parfois sortir de confuses paroles;/ l'homme y passe à travers des forêts de symboles/ qui l'observent avec des regards familers. [...]

5. Nell'insieme $X := \mathbb{R}$ sono definite le seguenti relazioni:

   (a) $x\rho x' :\Leftrightarrow 2x - 3x' = 6$
   (b) $x\rho x' :\Leftrightarrow x' < x + 1$
   (c) $x\rho x' :\Leftrightarrow x' > x^2$
   (d) $x\rho x' :\Leftrightarrow x^2 + x'^2 < 25$
   (e) $x\rho x' :\Leftrightarrow x' < x^2 - 2x - 3$
   (f) $x\rho x' :\Leftrightarrow |x| \geq 3$ e $|x'| \geq 2$
   (g) $x\rho x' :\Leftrightarrow x + x' \leq 2$ e $x^2 + x'^2 \leq 16$

   Tracciare nel piano reale $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il grafico di tali relazioni.

6. Sia $E = \{1, 2, 3\}$. Dare un esempio di relazione R su E che non sia né simmetrica né antisimmetrica.

7. Dire quali delle seguenti relazioni è antisimmetrica:

   (a) x è minore o uguale a y
   (b) x è minore di y
   (c) $x + 2y = 10$
   (d) x divide y.

8. Determinare quali tra le proprietà riflessiva (**R**), simmetrica (**S**), antisimmetrica (**AS**), transitiva (**T**) e totale (**TT**) sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:

   (a) nell'insieme delle rette del piano affine reale:
   $$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ è parallela (ma } \textit{non} \text{ coincidente) a } x';$$
   (b) nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:
   $$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ è perpendicolare a } x';$$
   (c) fissato $S \neq \emptyset$, nell'insieme $X := \mathcal{P}(S)$:
   $$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ è disgiunto da } x';$$
   (d) nell'insieme $X := \mathcal{P}(S)$ come sopra:
   $$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ è un sottoinsieme di } x';$$

(e) nell'insieme $X := \mathbb{N}$

$$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ è un multiplo di } x';$$

(f) nell'insieme $X := \mathbb{N}$

$$x\rho x' \Leftrightarrow xx' = z^2, \text{ per qualche } z \in \mathbb{N}$$

(g) nell'insieme $X := \mathbb{Z}$

$$x\rho x' \Leftrightarrow xx' > 0$$

(h) nell'insieme $X := \mathbb{Z}$

$$x\rho x' \Leftrightarrow x \text{ e } x' \text{ hanno lo stesso numero di cifre}$$

(nella usuale scrittura decimale).

9. Sull'insieme $X : \{1, 2, 3, 4\}$ verificare quali proprietà verifica la relazione avente grafico

$$R := \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}.$$

10. Sia X un insieme qualunque.

(a) Mostrare che il grafico della *relazione di uguaglianza* su X (cioè $x\rho x' \Leftrightarrow x = x'$) è l'insieme diagonale $\Delta_x := \{(x, x) : x \in X\}$.

(b) Mostrare che $X \times X$ è il grafico di una relazione su X, detta *relazione caotica*, definita nella maniera seguente: $x\rho x' \Leftrightarrow x, x' \in X$.

(c) Descrivere sugli elementi di X la relazione associata al grafico $\emptyset$ (come sottoinsieme di $X \times X$).

(d) Quali proprietà sono soddisfatte dalle tre relazioni precedenti, dette *relazioni banali*?

11. Ricordiamo che, data una relazione $\rho = (X, R)$ definita su un insieme X, si dice *relazione inversa* di ρ la relazione su X

$$\rho' := (X, R^{-1}) \text{ dove } (x, x') \in R^{-1} \Leftrightarrow (x', x) \in R.$$

Dato $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ descrivere esplicitamente R^{-1} qualora ρ sia definita nella maniera seguente:

(a) $x\rho x' \Leftrightarrow x' = 2x$

(b) $x \rho x' \Leftrightarrow x' = 3x - 3$

(c) $x \rho x' \Leftrightarrow x' - x = 1$

12. Si provi che le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono tra loro indipendenti fornendo esempi di relazioni che verificano due qualsiasi tali proprietà ma non la terza.

13. Si trovi l'errore nella seguente "dimostrazione" del fatto che la proprietà riflessiva è una conseguenza delle proprietà simmetrica e transitiva:

    Sia $a\rho b$; allora per simmetria $b\rho a$. Per transitività, da $a\rho b$ e $b\rho a$, segue che $a\rho a$, cioè la riflessività.

14. Quando una relazione *non* è riflessiva? quando *non* è simmetrica? antisimmetrica? transitiva?

15. Trovare tutte le partizioni (insiemistiche) dell'insieme $A = \{a, b, c\}$ a 3 elementi.

16. Trovare tutte le partizioni dell'insieme a 4 elementi $A = \{a, b, c, d\}$.

17. Sia ρ una relazione simmetrica e transitiva su un insieme A. Si provi che ρ è una relazione di equivalenza se e solo se vale la seguente proprietà:
$$\forall a \in A \ \exists \ b \in A : a\rho b.$$

18. Sia P l'insieme dei punti del piano. Sia ρ la relazione su P così definita: $p_1 \rho p_2$ se e solo se i punti p_1 e p_2 sono equidistanti da un fissato punto O. Si provi che ρ è una relazione d'equivalenza su P e si determini l'insieme quoziente P/ρ.

19. **Definizione costruttiva di $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$**
    Definiamo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione
$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'.$$

    (a) Verificare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

    (b) Verificare che le coppie del tipo $(m, 0), (0, n), (0, 0)$, con $m, n \neq 0$ sono un insieme di rappresentanti per le classi di $\sim$–equivalenza.

    (c) Sia $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Si definisca in $\mathbb{Z}$ un'operazione di **somma** ponendo
$$[(x, y)] + [(x', y')] := [(x + x', y + y')].$$

Si dimostri che l'operazione di somma è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

20. **Definizione costruttiva di $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{Z}$**
Definiamo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (dove $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) la relazione

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'.$$

   (a) Verificare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

   (b) Verificare che le coppie del tipo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, con m ed n primi tra loro, sono un insieme di rappresentanti per le classi di $\sim$–equivalenza.

   (c) Sia $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$. Si definisca in $\mathbb{Q}$ un'operazione di **somma** ponendo
$$[(x, y)] + [(x', y')] := [(xy' + x'y, yy')].$$
Si dimostri che l'operazione di somma è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

   (d) Si definisca in $\mathbb{Q}$ un'operazione di **prodotto** ponendo
$$[(x, y)] \cdot [(x', y')] := [(xx', yy')].$$
Si dimostri che l'operazione di prodotto è ben definita (ovvero, pur essendo definita sui rappresentanti delle classi, non dipende dalla scelta di tali rappresentanti).

21. Mostrare che se $\{X_i : i \in I\}$ è una partizione di un insieme X e $\{Y_j : j \in J\}$ è una partizione di un insieme Y, allora $\{X_i \times Y_j : (i, j) \in I \times J\}$ è una partizione di $X \times Y$.

22. Mostrare che le seguenti relazioni sono relazioni d'equivalenza, descriverne il relativo insieme quoziente e un insieme di rappresentanti per il quoziente:

   (a) in $\mathbb{Z}$, la relazione $x \rho x' \Leftrightarrow |x| = |x'|$;

   (b) in $\mathbb{Z}$, la relazione: *x ha la stessa parità di x'* (cioè o sono entrambi pari, o entrambi dispari);

   (c) in $\mathbb{R}$ la relazione: *x differisce per un multiplo intero di* 2π da x' (cioè, $x = x' + 2k\pi$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$);

(d) in $\mathbb{R}$, la relazione: *x ha la stessa parte intera inferiore di* x' (cioè $\lfloor x \rfloor = \lfloor x' \rfloor$);

(e) in $\mathbb{R}$, la relazione x *differisce per un intero* da x' (cioè $x = x' + k$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$);

(f) fissato un insieme S finito e non vuoto, in $X = \mathcal{P}(S)$ la relazione *x ha lo stesso numero di elementi* di x'.

23. Sia $\rho = (R, X)$ una relazione. Mostrare che ρ è una relazione di equivalenza se e solo se ρ^{-1} è una relazione di equivalenza.

24. Determinare tutte le relazioni di equivalenza dell'insieme $A = \{a, b, c\}$.