Alberi binari di ricerca
Lezione n°5

Prof.ssa Rossella Petreschi

Lezione del 24 /10/2011 del

Corso di Algoritmi e Strutture Dati

Riferimenti:

Paragrafo 7.4 del testo J.H.Kingston

“Algorithms and data Structures”

Edizioni: Addison Wesley

Alberi di ricerca

Albero di ricerca, AR: albero binario tale che

- ogni nodo u contiene un k, elemento di un tipo sul quale sia definito un ordinamento;
- tutti i nodi del sottoalbero sinistro di u contengono elementi minori o uguali a k;
- tutti i nodi del sottoalbero destro di u contengono elementi maggiori di k.

(il segno di uguaglianza può essere aggiunto indifferentemente o al sottoalbero sinistro o al sottoalbero destro, non ad entrambi)

Una visita inorder di AR, in Θ(n), genera tutti gli elementi di AR in ordine crescente.

Inserzione

A partire dalla radice, si segue un cammino discendente nell'albero. Si controlla x con il valore y del nodo che si sta analizzando (inizialmente $y = r$):

1. Se $x \leq y$ si confronta x con il figlio sinistro di y
2. Se $x > y$ si confronta x con il figlio destro di y

Si prosegue ricorsivamente sul cammino fintanto che non si trova libera la posizione appropriata sull'albero

Ogni operazione di inserimento costa al più $O(h(AR)) \leq O(n)$

Cancellazione

Si cancella x differenziando:

1. x foglia: si elimina x e l'arco (p(x),x). O(1)

2. x ha 1 figlio y: si elimina x e gli archi (p(x),x) e (x,y) e si crea l'arco(p(x),y) (se x era radice,y sarà la nuova radice). O(1)

3. x ha 2 figli: sia z il predecessore di x (massimo del sottoalbero sx di x).Si scambi x con z e si cancelli x nella nuova posizione. Si ricade nei casi 1 e 2 perché z ha al più un figlio. O(h(AR))≤O(n)

Analisi nel caso medio della costruzione di un AR

teorema

Th. La complessità media di una sequenza di inserzioni di n elementi, a partire da un albero di ricerca vuoto, supposte ugualmente distribuite le n! permutazioni di 1,2,…n, è dato da

$A(n) = 2(n+1)\, H_n - 4n \leq 1.38 n \log n$

dove

$H_n = (\Sigma 1/i, \text{ per } i = 1,\ldots,n) \leq \ln n + \gamma \; (\gamma = 0.5572,)$

n-esimo numero armonico ≤ lnn + costante di Eulero

Analisi nel caso medio della costruzione di un AR

da dove si parte

$A(n) = (1/n!)\Sigma Bliv(a)$, per ogni a in S_n

Dove

S_n = insieme delle n! permutazioni distinte di 1,2,…n

B(a) = AR relativo alla permutazione a

Bliv(a) = Σ liv(x), per tutti gli x nodi di B(a)

liv(x) = numero di spigoli nel cammino dalla radice ad x; liv(r)=0.

Esempio, A(3) = [3+3+3+3+2+2]/6 =8/3

Equazione di ricorrenza per A(n)/1

$A(0) = 0$

$A(n) = n-1+(2/n)\Sigma\ A(j-1)$, per $j = 1,\ldots,n$

perché:

$A(n) = (1/n!)\Sigma Bliv(a) =$ con a in S_n

$= (1/n!)\Sigma\ [n-1+ Lliv(a) +Rliv(a)] =$ con a in S_n

$= (1/n!)\Sigma\ (n-1)+ (1/n!)\Sigma\ Lliv(a) +(1/n!)\Sigma\ Rliv(a)] =$ con a in S_n

$= (n-1)+(2/n!)\Sigma\ Lliv(a) =$ con a in S_n

$= (n-1)+(2/n!)\Sigma\Sigma\ Lliv(a)=\ldots..$ con a in $S_{n,j}$ e $j=1,\ldots n$

(segue nella slide successiva)

dove:

$L(a)/R(a)$ = sottoalbero sinistro/destro di $B(a)$

$Lliv(a)/Rliv(a) = \Sigma\ liv(x)$, per tutti gli x nodi di $L(a)/R(a)$

$S_{n,j}$ = sottoinsieme di S_n caratterizzato dal primo elemento uguale a j

Equazione di ricorrenza per A(n)/2

…= $(n-1)+(2/n!)\Sigma\Sigma$ Lliv(a) = con a in $S_{n,j}$ e $j=1,\dots n$

= $(n-1)+(2/n!)\Sigma(n-1)!/(j-1)!\ \Sigma$ Bliv(a) = con a in S_{j-1} e $j=1,\dots n$

= $(n-1) + (2/n!)\Sigma\ (n-1)!A(j-1)$ = con $j=1,\dots n$

= $(n-1) + (2/n)\ \Sigma\ A(j-1)$

dato che:

$(j-1)!$	sono le possibili permutazioni, tutte ugualmente probabili, di j-1 elementi
$(n-1)!$	sono il numero di elementi in $S_{n,j}$
$(n-1)!/(j-1)!$	è il numero di volte che ogni permutazione di j-1 elementi appare in $S_{n,j}$

e quindi:

$A(0) = 0$

$A(n) = n-1+(2/n)\Sigma\ A(j-1)$, per $j = 1,\dots,n$

Soluzione dell'equazione di ricorrenza(1)

$A(0) = 0$

$A(n) = n-1+(2/n)\Sigma\ A(j-1)$, per $j = 1,\dots,n$

Passo1: si elimina la sommatoria

1. si moltiplica per n $\quad nA(n) = n(n-1) + 2\Sigma\ A(j-1)$, per $j = 1,\dots,n$
2. si calcola per n-1 $\quad (n-1)A(n-1) = (n-1)(n-2)+ 2\Sigma\ A(j-1)$, per $j = 1,\dots,n-1$
3. si sottrae la eq 2 dalla eq1

$$nA(n) - (n-1)A(n-1) = n\,(n-1) - (n-1)(n-2) + 2A(n-1)$$

$$nA(n) = 2\,(n-1) + (n+1)A(n-1)$$

Passo 2: si divide per 2n(n+1)

$$nA(n) = 2\,(n-1) + (n+1)A(n-1)$$

$$A(n)/\ 2(n+1) = (n-1)/n\,(n+1) + A(n-1)/2n$$

$$A(n)/\ 2(n+1) = 2/\,(n+1) - 1/n + A(n-1)/2n$$

Soluzione dell'equazione di ricorrenza(2)

Passo3: si applicano ripetute sostituzioni

$A(n)/ 2(n+1) = 2/ (n+1) -1/n + A(n-1)/2n =$

$= 2/ (n+1) -1/n + [2/n - 1/(n-1) +A(n-2)/2(n-1)]=$

$= 2/ (n+1) -1/n + [2/n - 1/(n-1) + [2/n-1 - 1/n-2 + A(n-3)/2(n-2)]]=$

$= 2/ (n+1) + 2/n +\ldots+ 2/n-(i-2) -1/n - 1/(n-1)-\ldots- 1/n-(i-1) + A(n-i)/2(n- (i-1))$

Passo4: si pone i=n

$A(n)/ 2(n+1) = 2/(n+1) + 2/n +\ldots+ 1 -1/n - 1/(n-1)-\ldots- 1 + 0 =$

$= 2/n +\ldots+ 1 -1/n - 1/(n-1)-\ldots- 1 + (2/1-2/1) + 2/(n+1) =$

$= (2/n +\ldots+ 2/2 + 2/1) - (1/n +\ldots+ 1/1) + 2/(n+1) - 2/1 = \Sigma 1/i -2n/n+1, i=1,..n$

Passo5: si moltiplica per 2(n+1)

$2(n+1)A(n)/ 2(n+1) =2(n+1)(\Sigma 1/i -2n/n+1)$

$A(n) =2(n+1)\Sigma 1/i - (2(n+1))(2n/n+1)$

$A(n) =2(n+1)\Sigma 1/i - 4n$

Analisi dell'operazione di cancellazione

Non esiste per la cancellazione un risultato analogo a quello della complessità media per l'inserimento, quindi rimane valida solo la complessità asintotica nel caso peggiore: $O(h(AR)) \leq O(n)$

Per essere sicuri di mantenere al più logaritmica l'altezza dell'albero, sia per inserzioni che per cancellazioni, si introducono gli alberi di ricerca bilanciati.