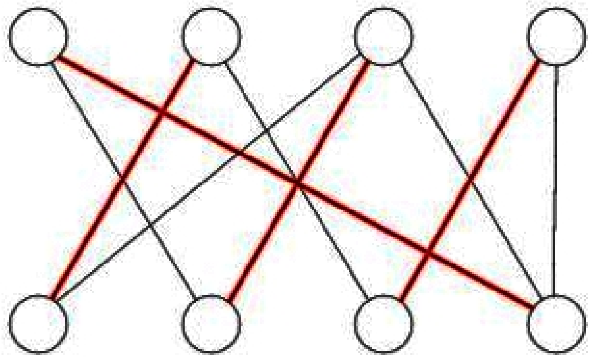
Algoritmi Avanzati

Graph Matching

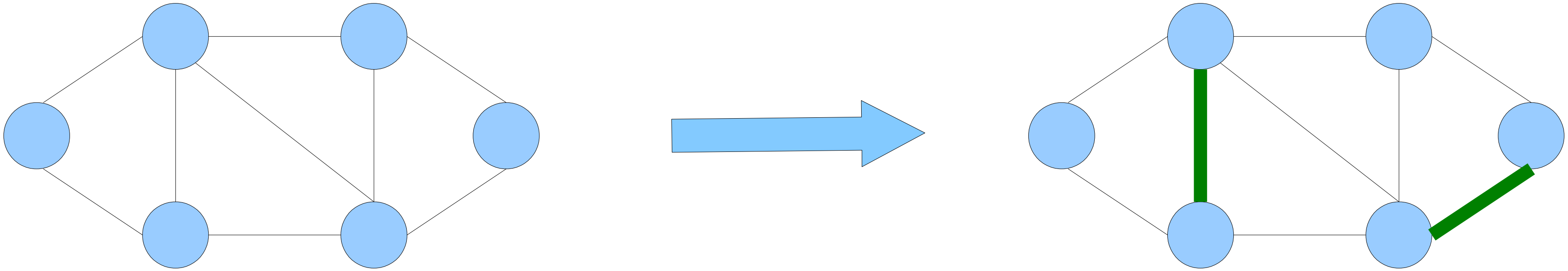


Relatore: **C. Calabrese**
Docente: **R. Petreschi**

Corso di Laurea Magistrale in Informatica
Anno 2010 / 2011

Matching sui Grafi:

Dato un grafo G=(V, E), un **Matching M** su G è un sottoinsieme di archi di E a due a due disgiunti.

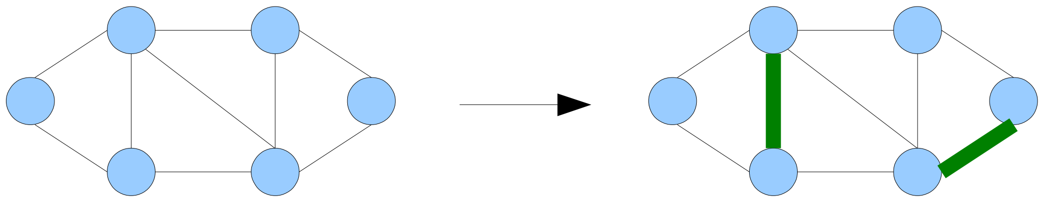


In un matching un vertice occorre in al più un arco

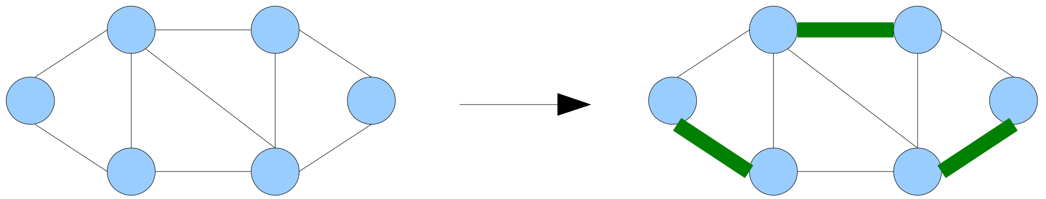
Matching sui Grafi (2):

Ci interessiamo a 3 tipi di matching:

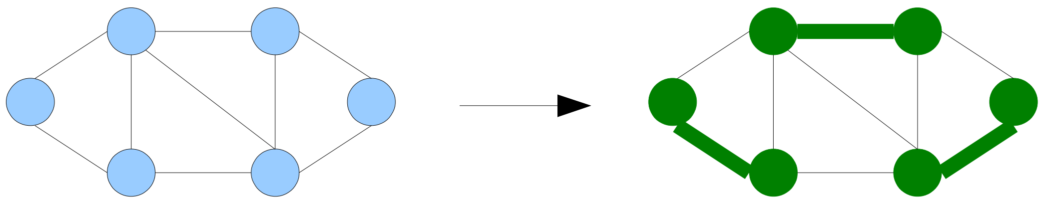
Matching **Massimale**



Matching **Massimo**



Matching **Perfetto**



Struttura della presentazione:

- Ci si interesserà dapprima a trovare un matching perfetto (se esiste) **di peso minimo su un grafo i cui archi sono stati pesati**.

- Si farà uso di **algoritmi probabilistici**

- L'idea dell'algoritmo si basa su 3 concetti fondamentali:

1) Teorema di Tutte
2) Verifica di Identità Polinomiali
3) Lemma di Isolamento

Algoritmi Randomizzati:

Tre tipi di approcci algoritmici:

Algoritmi Deterministici

- Si richiede che generino l'output atteso su ogni istanza in input del problema.
- L'analisi è sul caso pessimo.

Algoritmi Ad-Hoc

- Si sviluppano per funzionare su determinate istanze di input del problema.
- L'analisi è sul caso medio.

Algoritmi Randomizzati (2):

Introducono il concetto di casualità, generando un **numero casuale** in [1, 2, 3, … M] esprimibile in **O(logn) bit**, dove n è la lunghezza del numero casuale.

Dato un input di dimensione n, un algoritmo **richiede con alta probabilità un valore O(*f*(*n*)) di risorse**, se il numero di risorse usate è $\alpha f(n)$ con probabilità $1-n^{-c}$, con c e α costanti positive.

Algoritmi Randomizzati (2):

Possono essere classificati come:

Algoritmo Probabilistico Numerico:	E' un algoritmo numerico che genera una soluzione approssimata entro un determinato **intervallo di confidenza** (approssimazione).
Algoritmo Probabilistico Monte Carlo:	E' possibile che venga generato un output errato con un probabilità p ragionevolmente bassa.
Algoritmo Probabilistico Las Vegas:	E' un algoritmo definito per lavorare su tipiche istanze di problemi. Se e quando restituisce una soluzione, questa è sempre esatta.

Concetti Fondamentali

- Teorema di Tutte
- Verifica di Identità Polinomiali
- Lemma di Isolamento

Teorema di Tutte

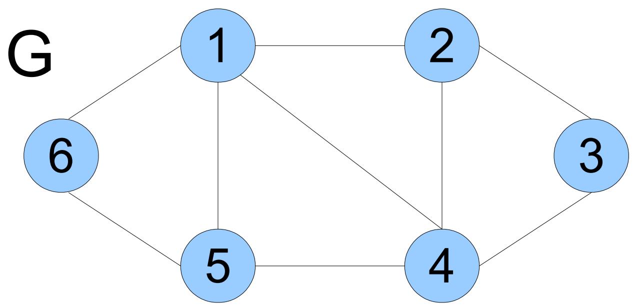
Mette in relazione l'esistenza del matching perfetto in un grafo G e il determinante della sua matrice di adiacenza.

Matrice di Tutte

Dato un grafo G e la sua matrice di adiacenza A, la matrice di Tutte T di G è definita come segue:

$$t_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} & \text{se} \quad a_{i,j} = 1 \quad \text{e} \quad j>i \\ -x_{j,i} & \text{se} \quad a_{i,j} = 1 \quad \text{e} \quad j<i \\ 0 & \text{se} \quad a_{i,j} = 0 \end{cases}$$

Teorema di Tutte (esempio)



A

	1	2	3	4	5	6
1		1	0	1	1	1
2	1		1	1	0	0
3	0	1		1	0	0
4	1	1	1		1	0
5	1	0	0	1		1
6	1	0	0	0	1	

T

	1	2	3	4	5	6
1		$X_{1,2}$	0	$X_{1,4}$	$X_{1,5}$	$X_{1,6}$
2	$-X_{1,2}$		$X_{2,3}$	$X_{2,4}$	0	0
3	0	$-X_{2,3}$		$X_{3,4}$	0	0
4	$-X_{1,4}$	$-X_{2,4}$	$-X_{3,4}$		$X_{4,5}$	0
5	$-X_{1,5}$	0	0	$-X_{4,5}$		$X_{5,6}$
6	$-X_{1,6}$	0	0	0	$-X_{5,6}$	

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse $Det(T) \neq 0$.

Dimostrazione:

Esistenza Matching Perfetto in G

$\Downarrow$

$Det(T) \neq 0$

$Det(T) \neq 0$

$\Downarrow$

Esistenza Matching Perfetto in G

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Esistenza Matching Perfetto in G

$\forall\ x_{i,j}$ si assegna

1 se $(i,j) \in M$, 0 altrimenti

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse $Det(T) \neq 0$.

Dimostrazione:

Esistenza Matching Perfetto in G

$\forall\, x_{i,j}$ si assegna

1 se $(i,j) \in M$, 0 altrimenti

Con $x_{i,j}$ così definite si ha

$Det(T) = (-1)^{n/2} \neq 0$

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse $\mathrm{Det}(T) \neq 0$.

Dimostrazione:

Esistenza Matching Perfetto in G

$\Downarrow$

$\mathrm{Det}(T) \neq 0$

$\mathrm{Det}(T) \neq 0$

$\Downarrow$

Esistenza Matching Perfetto in G

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Det(T) ≠ 0

Dall'algebra:

$$Det(A)=\sum_{\sigma} sgn(\sigma)\ t_{1,\sigma(1)} \ldots\ t_{n,\sigma(n)}$$

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse $\mathrm{Det}(T) \neq 0$.

Dimostrazione:

Ogni permutazione σ è esprimibile come prodotto di cicli disgiunti di lunghezza 2

$\mathrm{Det}(T) \neq 0$

Dall'algebra:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\ t_{1,\sigma(1)} \ldots t_{n,\sigma(n)}$$

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Ogni permutazione σ è esprimibile come prodotto di cicli disgiunti di lunghezza 2

∃ σ' tale che:

$t_{1,\sigma'(1)} \dots t_{n,\sigma'(n)} \neq 0$

Dall'algebra:

$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\ t_{1,\sigma(1)} \dots t_{n,\sigma(n)}$

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Ogni permutazione σ è esprimibile come prodotto di cicli disgiunti di lunghezza 2

∃ σ' tale che:

$t_{1,\sigma'(1)} \dots t_{n,\sigma'(n)} \neq 0$

Partendo da σ' si costruisce un grafo G' = (V,E') dove E' = {(i,σ'(i)) | i=1...n}

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Partendo da σ' si costruisce un grafo G' = (V,E') dove E' = {(i,σ'(i)) | i=1...n}

Ogni vertice di G' è attraversato due volte, magari dallo stesso arco. G' contiene esclusivamente cicli disgiunti di lunghezza pari.

∃ σ' tale che: $t_{1,\sigma'(1)} \ldots t_{n,\sigma'(n)} \neq 0$

Teorema di Tutte

Il Teorema

Sia G = (V, E) un grafo e T la sua matrice di Tutte: G contiene un matching perfetto M sse Det(T) ≠ 0.

Dimostrazione:

Partendo da σ' si costruisce un grafo G' = (V,E') dove E' = {(i,σ'(i)) | i=1...n}

Ogni vertice di G' è attraversato due volte, magari dallo stesso arco. G' contiene esclusivamente cicli disgiunti di lunghezza pari.

Prendendo da G' archi alterni nei cicli si ottiene un matching perfetto M per G!

Concetti Fondamentali

- Teorema di Tutte
- Verifica di Identità Polinomiali
- Lemma di Isolamento

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Caso Base:

n=1

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Caso Base:

$n=1 \quad \rightarrow \quad |I|^{1-1} \cdot \alpha = \alpha$

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Caso Base:

$n=1$

$|I|^{1-1} \cdot \alpha = \alpha$

Sempre vero in un polinomio di una singola variabile e di grado α

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Caso N-esimo:

Vero fino a n-1

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Caso N-esimo:

Vero fino a n-1

Dall'algebra sappiamo che

$$P(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{\beta} Q(X_2, \ldots, X_n) + R(X_1, \ldots, X_n)$$

dati due polinomi Q e R e β il grado di X_1 in P

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Consideriamo uno zero di P

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Dall'algebra sappiamo che

$$P(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{\beta}Q(X_2, \ldots, X_n) + R(X_1, \ldots, X_n)$$

dati due polinomi Q e R e β il grado di X_1 in P

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Consideriamo uno zero di P $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$

$Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0$

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \dots, X_n)$, con $X_1, \dots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \dots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

$Q(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$ $\Rightarrow$ $Q(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$, allora P può essere nullo per qualsiasi valore di $x_1 \in I$

$Q(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq 0$ $\Rightarrow$

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

$Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$ → $Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$, allora P può essere nullo per qualsiasi valore di $x_1 \in I$

→ Il numero degli zeri è al più $|I|$ ($\mathbf{|I|^{n-2}\alpha}$)

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

$Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow$

$Q(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \Rightarrow$ Il numero di zeri di P è al più $|I|^{n-1}(\beta + \text{grado}(Q))$ con β=grado di X_1 in P

Verifica di Identità Polinomiali:

Verificare se il determinante di T è nullo, quindi, è come verificare se un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$, con $X_1, \ldots, X_n$ in F, è identicamente nullo.

Considerando un sottoinsieme finito $I \subseteq F$ e il grado α del polinomio P, il numero di valori in I^n che sono zeri per $P(X_1, \ldots, X_n)$ è al più $|I|^{n-1}\alpha$

Dimostrazione (induzione su n)

Il numero di zeri di P è al più $|I|^{n-1}(\beta + \text{grado}(Q))$ con β=grado di X_1 in P

$\Rightarrow$ $\leq |I|^{n-1}\alpha$

Verifica di Identità Polinomiali:

Sapendo ciò è dunque possibile affermare che, dato un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$ e una n-upla qualsiasi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la probabilità che quest'ultima sia uno zero di P è minore o uguale a

$$\frac{\text{grado}(P)}{|I|}$$

Verifica di Identità Polinomiali:

Sapendo ciò è dunque possibile affermare che, dato un polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$ e una n-upla qualsiasi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,
la probabilità che quest'ultima sia uno zero di P è minore o uguale a

$$\frac{\mathrm{grado}(P)}{|I|}$$

$$\frac{|I|^{n-1}\,\mathrm{grado}(P)}{|I|^n}$$

evento desiderati

eventi possibili

Concetti Fondamentali

- Teorema di Tutte
- Verifica di Identità Polinomiali
- Lemma di Isolamento

Lemma di Isolamento

Considerando un sistema di insiemi (S, F) dove S è un insieme qualunque di elementi (s_1, …, s_n) e F è un insieme di sottoinsiemi di S.

Si assegna un peso w_i per ogni s_i (con i=1, …, n)

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi di S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi di S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

Consideriamo i pesi w_t fissati per ogni s_t, eccetto per un s_i

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi di S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

Consideriamo i pesi w_t fissati per ogni s_t, eccetto per un s_i ⇒ per s_i esiste una soglia α tale che:

$w_i < \alpha$

$w_i = \alpha$

$w_i > \alpha$

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi di S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

per s_i esiste
una soglia α tale che:

$w_i < \alpha$ → S_i è in ogni sottoinsieme di peso minimo

$w_i = \alpha$

$w_i > \alpha$

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi di S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

per s_i esiste
una soglia α tale che:

$w_i < \alpha$

$w_i = \alpha$

$w_i > \alpha$ → S_i non è in nessun sottoinsieme di peso minimo

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi si S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

per s_i esiste
una soglia α tale che:

$w_i < \alpha$

$\boxed{w_i = \alpha}$ $\Rightarrow$ Allora S_i è detto *ambiguo*

$w_i > \alpha$

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi si S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

per s_i esiste
una soglia α tale che:

$w_i < \alpha$

$w_i = \alpha$

$w_i > \alpha$

Allora S_i è detto *ambiguo*

La probabilità che S_i sia ambiguo è $\leq \frac{1}{2n}$

Lemma di Isolamento

Il Lemma

Si consideri un sistema di insiemi (S, F), dove ad ogni elemento s_i di S è assegnato un intero casuale w_i (detto *peso*) in un intervallo [1, 2, ..., 2n], dove n è il numero di elementi si S. La probabilità che esista un unico sottoinsieme di peso minimo di S in F è almeno 1/2

Dimostrazione

Allora S_i è detto *ambiguo*

La probabilità che S_i sia ambiguo è $\leq \frac{1}{2n}$

La probabilità che, su n pesi scelti in un intervallo di 2n, ve ne sia almeno uno ambiguo $\leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Riassumendo...

Teorema di Tutte

Esistenza Matching Perfetto in G	$\Leftrightarrow$	$Det(T) \neq 0$ T=Matrice di Tutte di G

Riassumendo...

Teorema di Tutte

Esistenza Matching Perfetto in G $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(T) \neq 0$

T=Matrice di Tutte di G

Identità Polinomiali

Polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$
n-upla qualsiasi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Prob}[P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=0] \leq \dfrac{\mathrm{grado}(P)}{|I|}$

Riassumendo...

Teorema di Tutte

Esistenza Matching Perfetto in G $\Longleftrightarrow$ $Det(T) \neq 0$
T=Matrice di Tutte di G

Identità Polinomiali

Polinomio $P(X_1, \ldots, X_n)$
n-upla qualsiasi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\Longrightarrow$ $Prob[P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=0] \leq \frac{grado(P)}{|I|}$

Lemma di Isolamento

Sistema di Insiemi
(S, F) con $s_i \in S$ di peso
$w_i \in [1, 2, \ldots 2|S|]$ $\Longrightarrow$ Prob[$\exists$ unico sottoinsieme di peso minimo in F] $\geq \frac{1}{2}$

Matching Perfetto di Peso Minimo

Difficoltà nel coordinare più processori:
in un grafo G può essere presente più di un matching perfetto.

Assegnando casualmente ad ogni arco di un grafo G=(V, E) un **peso** (i.e. un valore intero), il **peso di un matching** M di G (se questo esiste) è dato dalla somma di tutti i pesi degli archi di G in M.

Se i pesi assegnati agli archi vengono presi da un range [1, 2, …, 2m], dove m è il numero degli archi, il **lemma d'isolamento** ci assicura che la probabilità che il matching perfetto di peso minimo sia unico è almeno 1/2

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia G=(V,E) i cui archi sono stati pesati con valori in [1, 2, …, 2m], dove m =|E|, e sia T la relativa matrice di Tutte. Per ogni indeterminata $x_{i,j}$ di T si assegna il valore $2^{W_{i,j}}$ dove $W_{i,j}$ è il peso dell'arco (i, j). La matrice così ottenuta prende il nome $\mathcal{T}$.

peso del matching perfetto di peso minimo

Sia G=(V,E) un grafo e sia M il suo unico matching perfetto di peso minimo W. La massima potenza di 2 che divide Det($\mathcal{T}$) è 2^{2W}.

Matching Perfetto di Peso Minimo

peso del matching perfetto di peso minimo

Sia G=(V,E) un grafo e sia M il suo unico matching perfetto di peso minimo W. La massima potenza di 2 che divide Det($\mathcal{T}'$) è 2^{2W}.

Dimostrazione

Si consideri la permutazione σ corrispondente a M. Contribuisce al calcolo del determinante di $\mathcal{T}'$ con valore $(-1)^{n/2}2^{2W}$

Matching Perfetto di Peso Minimo

peso del matching perfetto di peso minimo

Sia G=(V,E) un grafo e sia M il suo unico matching perfetto di peso minimo W. La massima potenza di 2 che divide Det($\mathcal{T}$) è 2^{2W}.

Dimostrazione

Si consideri la permutazione σ corrispondente a M. Contribuisce al calcolo del determinante di $\mathcal{T}$ con valore $(-1)^{n/2}2^{2W}$

→

Altra permutazione qualsiasi σ' corrispondente a un matching perfetto M' con peso W'.

Se i cicli di σ' sono tutti i lunghezza 2

Se i cicli hanno lunghezza > 2

Matching Perfetto di Peso Minimo

peso del matching perfetto di peso minimo

Sia G=(V,E) un grafo e sia M il suo unico matching perfetto di peso minimo W. La massima potenza di 2 che divide Det($\mathcal{T}$) è 2^{2W}.

Dimostrazione

Altra permutazione qualsiasi σ' corrispondente a un matching perfetto M' con peso W'.

Se i cicli di σ' sono tutti i lunghezza 2 ⇒ Il contributo di σ' è $(-1)^{n/2}2^{2W'}$, con W'>W: è divisibile per 2^{2W}

Se i cicli hanno lunghezza > 2

Matching Perfetto di Peso Minimo

peso del matching perfetto di peso minimo

Sia G=(V,E) un grafo e sia M il suo unico matching perfetto di peso minimo W. La massima potenza di 2 che divide Det($\mathcal{T}$) è 2^{2W}.

Dimostrazione

Altra permutazione qualsiasi σ' corrispondente a un matching perfetto M' con peso W'.

Se i cicli di σ' sono tutti i lunghezza 2

Se i cicli hanno lunghezza > 2

Presi archi alterni in tali cicli si ottengono due matching perfetti M_1 e M_2 con pesi W_1 e W_2. Il valore assoluto del contributo di σ' è dunque $2^{2W_1 + 2W_2}$, con W_1 e W_2 maggiori a W

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}'^{\,i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}'$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}. E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathcal{T}'_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}'_{n,\sigma(n)}$$

$(i,j) \in M$

$\Downarrow$

$$\frac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j})}{2^{2W}}$$

dispari

$$\frac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j})}{2^{2W}}$$

dispari

$\Downarrow$

$(i,j) \in M$

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}^{i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}.

E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathcal{T}_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma(n)}$$

$(i,j) \in M$

$\Downarrow$

Allora $\exists\ \sigma_M$ t.c.

$$\mathcal{T}_{1,\sigma_M(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma_M(n)} = 2^{2W}$$

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}^{i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}. E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathcal{T}_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma(n)}$$

$(i,j) \in M$

Allora ∃ σ_M t.c.

$$\mathcal{T}_{1,\sigma_M(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma_M(n)} = 2^{2W}$$

a meno dei segni, la sommatoria si riduce a

$|2^{2W}| + |2^{\alpha 1}| + \ldots |2^{\alpha n}|$

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}^{i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}.

E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathcal{T}_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma(n)}$$

$(i,j) \in M$

Allora $\exists\ \sigma_M$ t.c.

$$\mathcal{T}_{1,\sigma_M(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma_M(n)} = 2^{2W}$$

a meno dei segni, la sommatoria si riduce a

$$|2^{2W}| + |2^{\alpha 1}| + \ldots |2^{\alpha n}|$$

Ogni αi > W

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}'^{\,i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}'$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}.

E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \operatorname{sgn}(\sigma)\mathcal{T}'_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}'_{n,\sigma(n)}$$

$$\frac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{\,i,j})}{2^{2W}}$$

dispari

per assurdo:
(i,j) $\notin$ M

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}'^{i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}'$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. $\sigma(i)=j$. Chiamiamo tale insieme P_{ij}.

E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{T}'_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}'_{n,\sigma(n)}$$

per assurdo: $(i,j) \notin M$

da Tutte sappiamo che solo permutazioni con cicli pari contribuiscono alla somma

$$\frac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}'^{i,j})}{2^{2W}}$$

dispari

Matching Perfetto di Peso Minimo

Sia $\mathcal{T}^{i,j}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathcal{T}$ la riga i e la colonna j.

Selezione degli archi

Sia G = (V, E) un grafo pesato dove il matching perfetto M di peso minimo W è unico. L'arco (i,j) appartiene a M sse $2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) / 2^{2W}$ è dispari.

Dimostrazione

Considerando tutte le σ t.c. σ(i)=j. Chiamiamo tale insieme P_{ij}.

E' quindi vero che

$$2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j}) = \sum_{\sigma \in P_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathcal{T}_{1,\sigma(1)} \cdots \mathcal{T}_{n,\sigma(n)}$$

per assurdo: (i,j) $\notin$ M

Ogni σ in P_{ij}, quindi, contribuisce alla somma con valore $2^{2W(M')}$ o $2^{2W(M1)+2W(M2)}$ per dei matching M', M1, M2 qualsiasi

da Tutte sappiamo che solo permutazioni con cicli pari contribuiscono alla somma

$$\frac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j})}{2^{2W}}$$

dispari

Algoritmo Parallelo

Input: Un grafo G=(V,E) t.c. G ammette un matching perfetto

Output: Un insieme M di archi t.c. M è un matching perfetto di peso minimo con probabilità ≥ 1/2

- $\forall$ (i, j) $\in$ E assegna parallelamente a (i, j) un valore intero $W_{i,j}$ random da [1, 2, ...2m]. (m=|E|)
- Sia $\mathcal{T}$ la matrice di Tutte di G dove $\forall$ $X_{i,j}$ si assegna $2^{W_{i,j}}$
- Si calcoli Det($\mathcal{T}$), e si deduca da Det($\mathcal{T}$) il peso W dell'unico matching perfetto di peso minimo.
- Si calcoli la matrice dei cofattori di $\mathcal{T}$. (il valore assoluto della cella (i,j) è Det($\mathcal{T}^{i,j}$))
- $\forall$ (i, j) $\in$ E parallelamente:

  se $\dfrac{2^{W_{i,j}} \det(\mathcal{T}^{i,j})}{2^{2W}}$ dispari allora si aggiunge (i,j) a M

Algoritmo Parallelo

Le istruzioni che pesano maggiormente sulla complessità dell'algoritmo sono quelle che coinvolgono il calcolo matriciale.

Sia A una matrice di interi di dimensione nxn, dove ogni elemento più essere espresso in k bit. Det(A) e Adj(A) possono essere calcolate da un algoritmo parallelo randomizzato in tempo $O(\log^2 n)$ e $O(nM(n)k)$ processori, dove $M(n)$ è il numero di operazioni aritmetiche coinvolte nel prodotto di due matrici nxn. Il miglior limite finora conosciuto per $M(n)$ è $O(n^{2.376})$ [*Galil & Pan*]

Un matching perfetto può essere calcolato in tempo $O(\log^2 n)$ e $O(n^{3.5}m)$ processori su una PRAM CREW randomizzata.

Matching Massimo

Non tutti i grafi ammettono un matching perfetto, ma tutti ammettono un matching massimo.

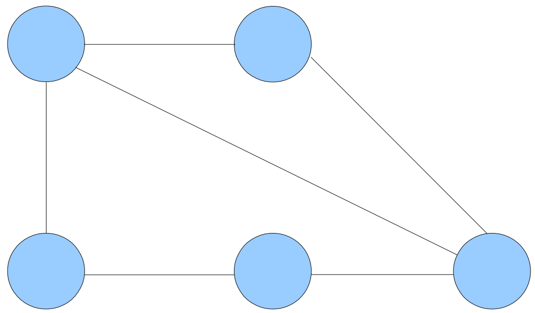
Sia α il numero degli archi di un matching massimo M di un grafo G=(V,E):

- Si connettono tutti i vertici in V a un numero $n-2\alpha$ di nuovi vertici, G' ammette sicuramente un matching perfetto. Inoltre, ogni matching perfetto di G' contiene un matching di α archi.

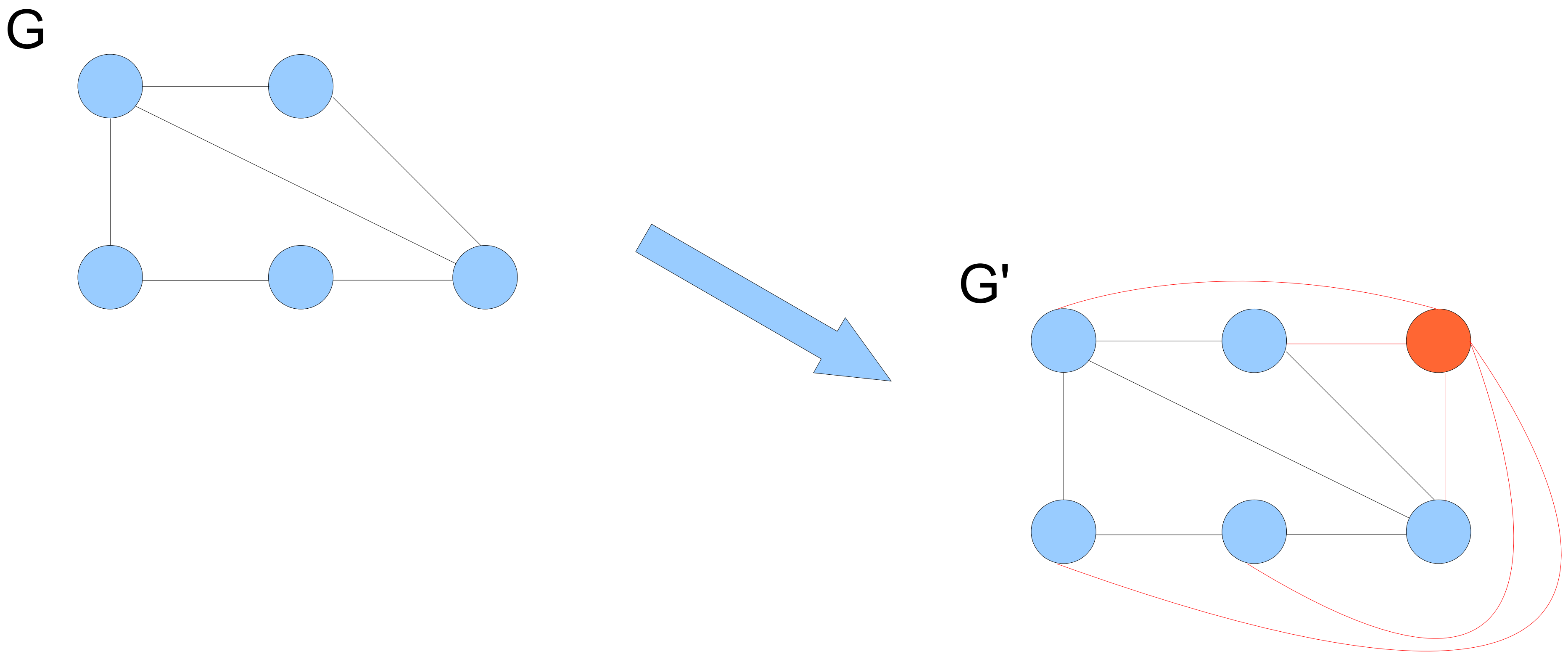
- Si calcola un matching perfetto M' di peso minimo e si eliminano da M' gli archi incidenti ai vertici aggiunti precedenti. Ciò che rimane è un matching massimo per G

Matching Massimo (esempio)

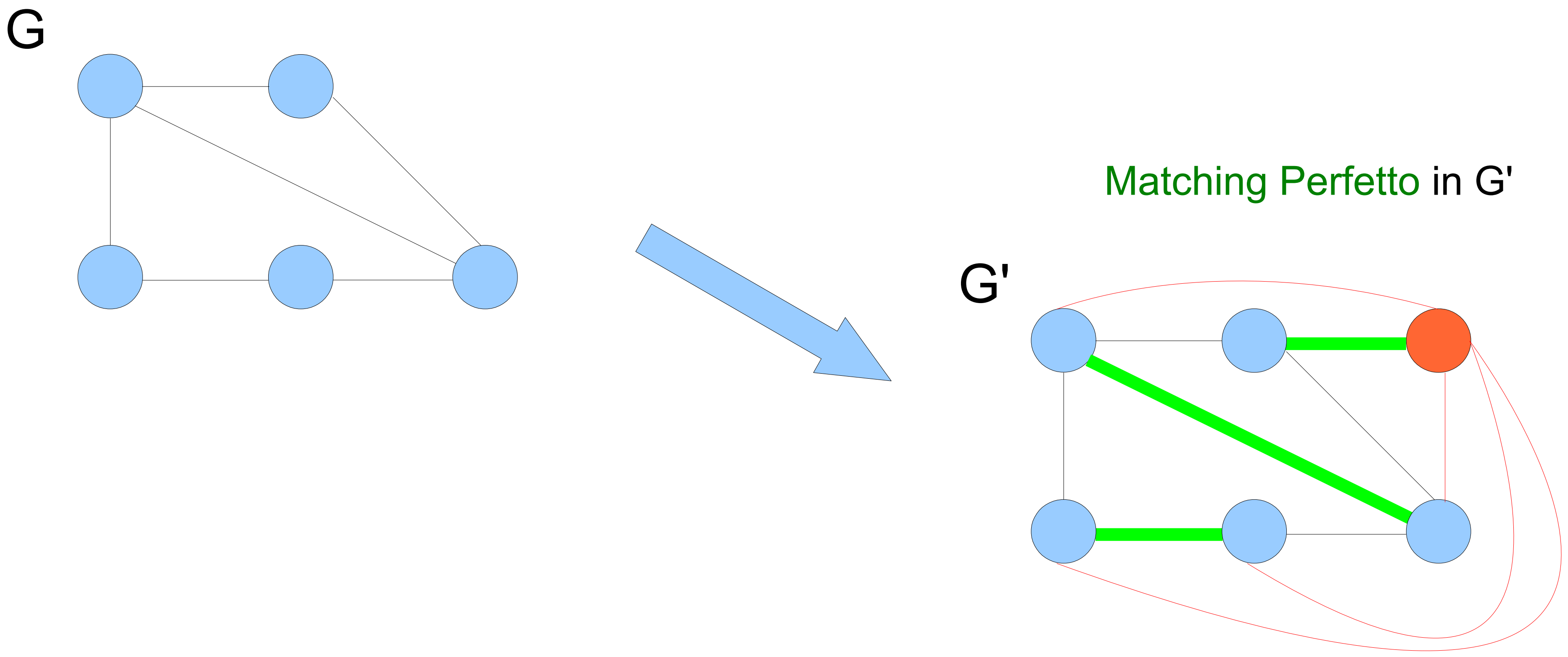
G



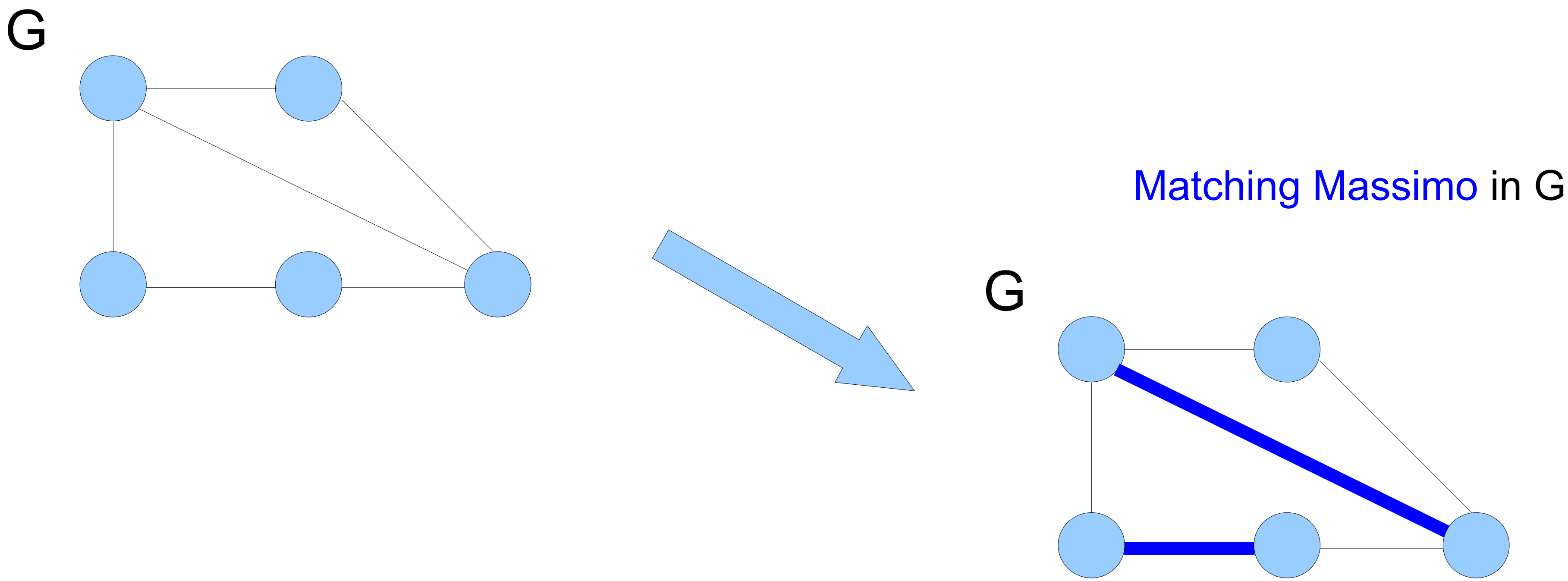
Matching Massimo (esempio)



Matching Massimo (esempio)



Matching Massimo (esempio)



Matching Massimo

Si considerino i valori k t.c.:

- $1 \leq k \leq n-2$
- $k+n$ è pari

Si esegue una ricerca binaria su tali valori fino a trovare un k tale che G_k (il grafo ottenuto aggiungendo k vertici) ammette un matching perfetto (verificabile tramite Tutte).

L'algoritmo così modificato calcola un matching perfetto in $O(\log^2 n)$ tempo se il grafo lo ammette, altrimenti calcola un matching massimo in $O(\log^3 n)$. L'algoritmo richiede $O(n^{3.5}m)$ processori in una PRAM CREW randomizzata.

Estensione Las Vegas

L'algoritmo finora descritto è di tipo **Monte Carlo**!

Può non generare un matching perfetto (se il grafo lo ammette) o peggio può addirittura sbagliare nel trovare un matching massimo.

Disponendo di un algoritmo (di tipo Monte Carlo anch'esso) per calcolare il limite superiore del massimo matching di un grafo è possibile verificare il matching ottenuto.

Più precisamente: l'approccio diventa **Las Vegas** poiché i due algoritmi, **eseguiti parallelamente** in $O(\log^2 n)$, terminano se la dimensione del matching trovato rispetta il limite calcolato dal secondo algoritmo

Estensione Las Vegas

Il Teorema: Formulazione Alternativa

Un grafo $G = (V, E)$ contiene un matching perfetto M sse per ogni $U \subseteq V$, il numero di componenti connesse aventi numero di vertici dispari nel grafo indotto da $V \setminus U$ è minore o uguale a $|U|$.

Estensione Las Vegas

Il Teorema: Formulazione Alternativa

Un grafo G = (V, E) contiene un matching perfetto M sse per ogni $U \subseteq V$, il numero di componenti connesse aventi numero di vertici dispari nel grafo indotto da V\U è minore o uguale a |U|.

Questo implica che se nel caso **non** vi è un matching perfetto il numero di componenti connesse con numero di vertici dispari è **maggiore di |U|**.

Estensione Las Vegas

Dato un grafo G=(V,E), si denoti con **Odd(G)** il numero di componenti connesse in G aventi numero di vertici dispari.

Considerando $U \subseteq V$, se in un G non è presente un matching perfetto, allora (dalla formulazione alternativa di Tutte):

$$Odd(G(V - U)) > |U|$$

$Odd(G(V - U)) - |U|$ è un limite inferiore per il numero di vertici non coperti da qualsiasi massimo matching in G.

Estensione Las Vegas

Ne consegue la seguente formula per il limite superiore:

Formula di Tutte & Berge

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{|V| - Odd(G(V - U)) + |U|}{2}$$

Dove $\nu(G)$ indica la **dimensione del massimo matching** in G e un insieme U per cui la frazione è minima è detto **insieme di Tutte**

Estensione Las Vegas

Ne consegue la seguente formula per il limite superiore:

Formula di Tutte & Berge

-(**Odd(G(V - U)) - |U|**)

$$v(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{|V| - Odd(G(V - U)) + |U|}{2}$$

Dove v(G) indica la **dimensione del massimo matching** in G e un insieme U per cui la frazione è minima è detto **insieme di Tutte**

Estensione Las Vegas

Definizioni Preliminari:

- Dato un sottoinsieme $S \subseteq V$ per un grafo $G=(V,E)$, si dice **vicinato** di S l'insieme N(S) definito come segue:

$$N(S)=\{ v \in V-S \mid (v,s) \in E \ \text{ e } \ s \in S \}$$

- Un vertice $v \in V$ in un grafo $G=(V,E)$ è detto **critico** se

$$\nu(G(V-\{v\})) = \nu(G)-1$$

Come conseguenza del teorema di Gallai-Edmonds l'insieme vicinato N(S), tale che S è l'insieme dei vertici non critici di G, è un insieme di Tutte.

Estensione Las Vegas

Algoritmo di Lovasz:

Per un grafo G=(V,E), è possibile calcolare l'insieme di Tutte N(S) in **n+1 iterazioni**.

Più precisamente viene calcolato $\nu(G)$ e $\nu(G(V-\{v\}))$ per ogni $v \in V$.

Si noti che la probabilità di errore è minore di $\frac{1}{2(n+1)}$ per ogni $v \in V$.

Banalmente, la probabilità di calcolare un insieme di Tutte corretto è di almeno $\frac{1}{2}$.